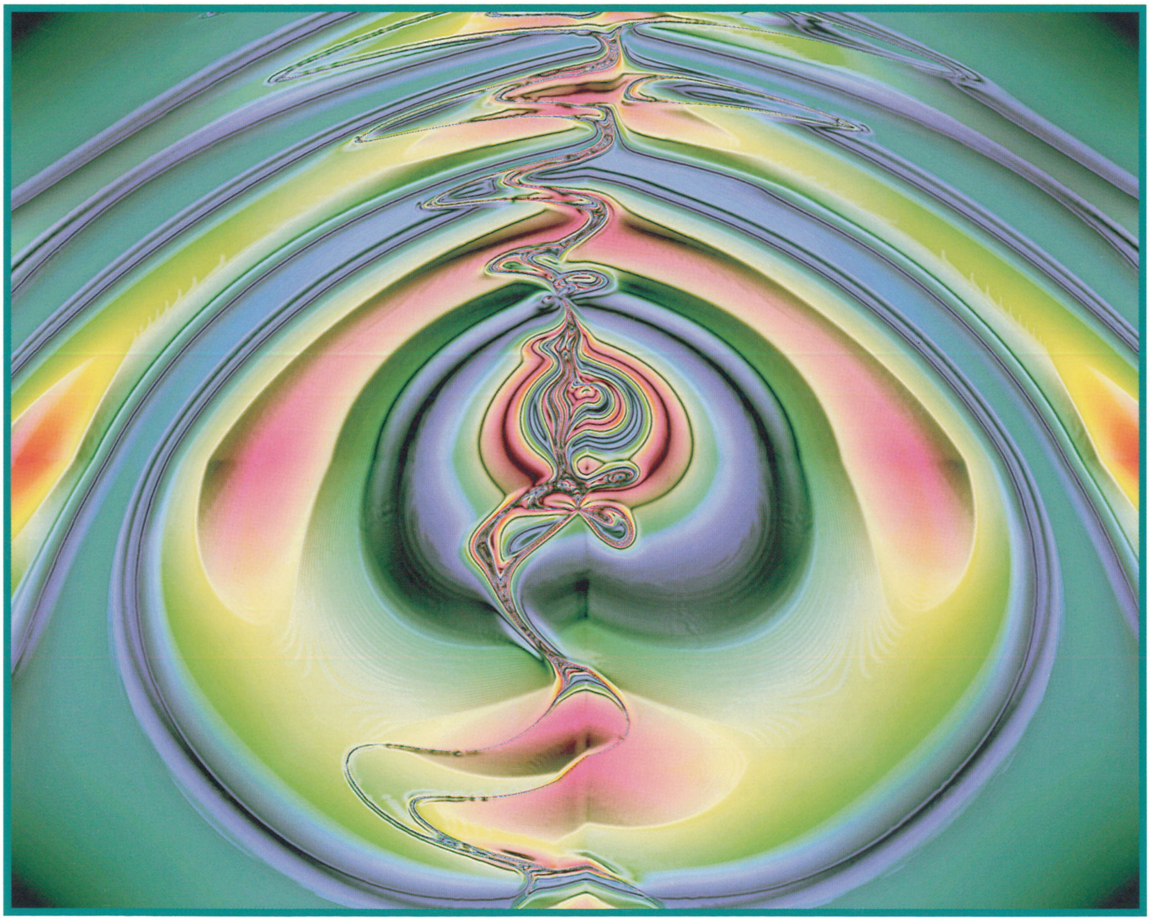
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2009年10月1日発行　第47巻10号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

10
2009

特集 数学と物理に広がる不変量
量子トポロジーとその周辺



No.556
サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 556 October 2009

数学と物理に広がる不変量

量子トポロジーとその周辺

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，1 年間（本誌＋別冊 2 冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌＋別冊 1 冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2006 年/12 省略
2007 年/1 ヤング図形で遊ぶ物理と数学
/2 ランダム行列の広がり
/3 現代物理における超対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［代数編］
別冊 双対性の世界
/5 数学の直観的理解
/6 物理における位相の世界
/7 代数的物理観
/8 数学における場の量子論
/9 ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊 素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008 年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊 多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009 年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー

数理科学臨時別冊一覧

07 年/12 計算神経科学への招待
08 年/1 演習 くり込み群
08 年/3 熱方程式で学ぶ逆問題
08 年/5 重力理論講義
08 年/6 代数幾何入門講義
08 年/7 ネットワーク科学への招待
08 年/9 物理のためのリー群とリー代数
08 年/11 量子暗号理論の展開
09 年/1 量子力学の考え方
09 年/7 ゲージ理論の発展
09 年/9 量子コンピュータの基礎［第 2 版］

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

October 2009 MATHEMATICAL SCIENCES Number 556

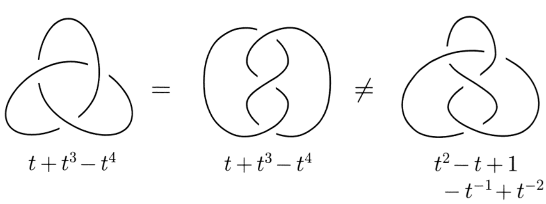
特集／数学と物理に広がる不変量

量子トポロジーと不変量

大槻 知忠

1980年代の半ばにジョーンズ多項式が発見されたことを発端として，数理物理的な手法が低次元トポロジーに導入され，結び目と3次元多様体の大量の不変量が発見されました．これらの不変量は，数理物理，統計物理，量子群，作用素環などの周辺分野と関連して研究されており，この研究領域は**量子トポロジー**（**quantum topology**）と呼ばれています．本特集で考えている不変量は主に量子トポロジーのででてくる不変量です．

トポロジーにおける**不変量**とは，幾何学的対象に対してある値を定める対応であって，その幾何学的対象を連続的に変形したときにその値が不変であるようなもののことです．円周を3次元ユークリッド空間にうめこんだもののことを**結び目**といいますが，例えば，結び目の不変量（**イソトピー不変量**といいます）とは，結び目の連続変形（イソトピー）で不変になるように各結び目に値を定めたもののことです．例えば，下図の結び目は左の2つの結び目は連続変形で互いにうつりあい（**3つ葉結び目**），右の結び目（**8の字結び目**）は3つ葉結び目と連続変形でうつりあいませんが，これらの結び目の不変量であるジョーンズ多項式はそれぞれの結び目の下にかいた値になります．連続変形でうつりあう結び目を「同じ」結び目とおもうことにすると，ポイントは

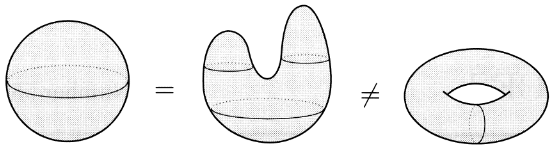


同じ結び目 $\Longrightarrow$ 不変量の値は同じ

不変量の値が異なる $\Longrightarrow$ 結び目は異なる

ということです（それぞれの矢印の逆は成り立つとは限りません）．一般に，与えられた2つの結び目が同じであることを確かめるのは比較的簡単（つまり，変形してうつりあう手順を具体的にかいてやればよい）ですが，2つの結び目が異なることを証明するのは簡単ではありません（少し変形してみてうつりあわなかったとしても，もっと変形するとうつりあうかもしれないので）．しかし，不変量を使うと2つの結び目が異なることを（もしそれらの不変量の値が異なっている場合は）比較的簡単に示すことができます．例えば，3つ葉結び目と8の字結び目は，それらのジョーンズ多項式の値が異なっていることにより，異なる結び目であることがわかります．

また，トポロジーのででてくる基本的な幾何学的対象に多様体というものがあります．おおざっぱにいうと，例えば，2次元多様体は曲面，3次元多様体は（曲がっている）3次元空間だとおもってください．多様体の不変量（**位相不変量**といいます）とは，



種数 0　　種数 0　　種数 1

多様体の連続変形（同相）で不変になるように各多様体に値を定めたもののことです．例えば，2 次元多様体（曲面）の不変量として種数というものが知られていますが，上図の左 2 つの曲面（**2 次元球面**）の種数は 0 で右の曲面（**トーラス**）の種数は 1 なので，2 次元球面とトーラスは連続変形でうつりあわない（同相ではない）ということがわかります．

多様体の不変量として，古典的には（20 世紀の初期から），ホモロジー群や基本群が知られていました．これらの不変量は，例えば多様体を切ったり貼ったりすることで，多様体そのものを観察することにより導出されます．そのような不変量の研究の様相が劇的に変ったのは，1980 年代に数理物理的な（量子論的な）手法が低次元トポロジーに導入されたことによります．量子論に由来する不変量の特徴は「多様体に派生する空間や構造からもとの多様体の不変量が導かれる」（その空間は，しばしば，無限次元の対称性をもつ無限次元空間）ということで，この手法により膨大な数の不変量が発見されました．

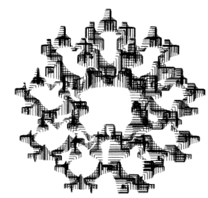
古典解析力学において，ある点を出発した粒子が別の点に到達するときの経路は各経路に対して値を与えるラグランジアンという汎関数の臨界点として与えられました．対応する量子論において，粒子がある点から別の点に行くときには複数の経路を同時に通って行くと考えられていますが，ある点にいた粒子が別の点に現れる確率（**相関関数**）はラグランジアンの指数関数をすべての経路にわたって積分すること（**経路積分**）によって与えられます．1980 年代の終りに，ウィッテンはチャーン・サイモンズ汎関数をラグランジアンとする 3 次元多様体上の量子場の理論（**チャーン・サイモンズ理論**）を考え，このときの経路積分で与えられた相関関数がその 3 次元多様体の不変量を表すことを主張しました．今の場合，対応する古典論はチャーン・サイモンズ汎関数の臨界点（すなわち平坦接続）として与えられこれは空間の長さによらないということが，その相関関数に位相不変性を期待する根拠です．とくに，3 次元多様体の中に結び目があるときは結び目の不変量が得られます．経路積分は無限次元空間上の積分なので，今の場合の経路積分そのものは未だ数学的に正当化されていませんが，経路積分からオペレータ形式や摂動展開という手法で導かれる量は数学的に厳密に再定義することができ，そのようにして得られる結び目や 3 次元多様体の不変量は**量子不変量**と呼ばれています．量子不変量やそれに関連する不変量が量子トポロジーの中心的な研究対象です．

歴史的には，チャーン・サイモンズ理論より前に，結び目の量子不変量の一番簡単なものであるジョーンズ多項式が，1980 年代の半ばに作用素環の専門家であるジョーンズによって作用素環を用いて発見されました．その後，統計物理において可解模型を与えるための方程式であるヤン・バクスター方程式は結び目の不変量を与えるための条件でもあることが明らかになり，その方程式の解である R 行列を用いて結び目の不変量が大量に構成されました．さらに，R 行列は量子群の表現のインタートワイナーとして大量生産できることが明らかになり，それらの結び目不変量は量子不変量として統一的に扱われるようになります．また，チャーン・サイモンズ理論や共形場理論のような数理物理的な理解も進みました．

本特集は，量子トポロジーに現れる不変量や量子トポロジーの周辺分野のトピックの解説記事からなっています．量子トポロジーは，その歴史的経緯からも，トポロジーと周辺分野が交流することによって発展してきました．不変量そのものが（例えば結び目のような）幾何学的対象を（多項式のような）代数的対象に帰着する離散化プロセスでもあるので，異なるタイプの対象を橋わたしするために多くの分野が不変量の研究に関わってくることで，より豊かな世界が広がっているのであるとおもいます．

（おおつき・ともただ，京都大学数理解析研究所）

結び目の有限型不変量



葉廣 和夫

1. 序

絡み目のジョーンズ多項式の発見以来，絡み目の様々な新しい不変量が構成され，活発に研究されている．1989年ごろ，Gusarov[4)] と Vassiliev[12)] は独立に，絡み目の有限型不変量の概念を導入した．有限型不変量の概念は絡み目の様々な多項式不変量とその一般化（量子不変量）を統一的に理解するための一つの枠組みを与える．絡み目の Kontsevich 積分[7)] は，有理数値有限型不変量に関して普遍性を持つ．Kontsevich 積分によって，絡み目の有理数値の有限型不変量全体の空間は，組合せ的なレベルで構造が決定された．Kontsevich 積分は非常に強力な不変量であり，すべての絡み目がそれによって区別されると予想されている．

本稿では，有限型不変量の概念について解説する．詳しくは，文献 1, 6, 10) を参照していただきたい．

2. 結び目の不変量

結び目とは，円周 S^1 から3次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ への可微分な埋め込みである（図 1）．

2個の結び目 $K, K'\colon S^1 \hookrightarrow \boldsymbol{R}^3$ が互いに**イソトピック**であるとは，可微分写像

$$h\colon S^1 \times [0,1] \to \boldsymbol{R}^3$$

が存在して，各 $x \in S^1$ に対して

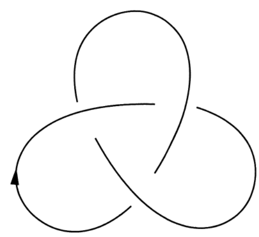


図 1 結び目の例.

$$h(x,0) = K(x), \quad h(x,1) = K'(x)$$

が成り立ち，各 $t \in [0,1]$ に対して，

$$h_t\colon S^1 \to \boldsymbol{R}^3, \quad x \mapsto h(t,x)$$

が埋め込みになっていることをいう．写像 h は K と K' の間の**イソトピー**と呼ばれる．正確でない言葉を使えば，イソトピーとは結び目の「連続的な変形」のことである．厳密な説明は繁雑となるので，以下では適宜，正確さを欠いた説明をする．

結び目理論における一つの基本的な考え方は，結び目のイソトピーによらない性質を調べるということである．イソトピックな結び目は同等なものとみなされる．結び目全体からなる集合 $\mathrm{Emb}(S^1, \boldsymbol{R}^3)$ からある集合 S への写像

$$f\colon \mathrm{Emb}(S^1, \boldsymbol{R}^3) \to S$$

が結び目の**不変量**であるとは，互いにイソトピックな結び目 K, K' に対して，$f(K) = f(K')$ が成り立つことをいう．結び目全体からなる集合 $\mathrm{Emb}(S^1, \boldsymbol{R}^3)$ には，C^∞ 位相と呼ばれるある自然な位相が入る．2個の結び目 K, K' が互いにイソ

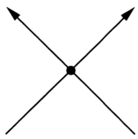


図 2　横断的な 2 重点.

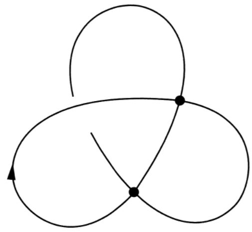


図 3　特異結び目の例.

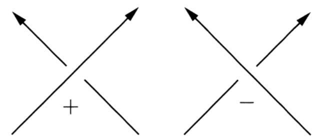


図 4　正の交点と負の交点.

トピックであることと，$\mathrm{Emb}(S^1, \boldsymbol{R}^3)$ の中で K と K' が同じ弧状連結成分に入っていることは同値である．よって，結び目のイソトピー類全体からなる集合 $\mathcal{K}$ は，$\mathrm{Emb}(S^1, \boldsymbol{R}^3)$ の弧状連結成分の全体からなる集合 $\pi_0 \mathrm{Emb}(S^1, \boldsymbol{R}^3)$ と同一視できる．単位元を持つ可換環 k に値を持つ結び目の不変量の空間は $\mathrm{Map}(\mathcal{K}, k)$ と同一視できる．

k を単位元を持つ可換環とする．一般に位相空間 X の 0 次コホモロジー群 $H^0(X; k)$ は，X の弧状連結成分の集合 $\pi_0 X$ から k への写像の全体からなる k 加群と同一視できる．結び目の空間に当てはめると，

$$H^0(\mathrm{Emb}(S^1, \boldsymbol{R}^3); k) \cong \mathrm{Map}(\mathcal{K}, k)$$

を得る．Vassiliev による有限型不変量の定義では，このように結び目の不変量の空間を $\mathrm{Emb}(S^1, \boldsymbol{R}^3)$ の 0 次コホモロジー群と同一視する．$\mathrm{Emb}(S^1, \boldsymbol{R}^3)$ は，S^1 から $\boldsymbol{R}^3$ への可微分写像の空間 $\mathrm{Map}(S^1, \boldsymbol{R})$ の部分空間であり，補空間

$$D := \mathrm{Map}(S^1, \boldsymbol{R}) \setminus \mathrm{Emb}(S^1, \boldsymbol{R}^3)$$

は判別集合と呼ばれる．判別集合は，S^1 から $\boldsymbol{R}$ への可微分写像のうち特異点を持つものの全体である．Vassiliev による有限型不変量の理論では，判別集合の構造に付随したスペクトル系列が用いられている．

3. 結び目の有限型不変量

Gusarov は Vassiliev とは独立に，結び目の有限型不変量の組合せ的な定義を与えた．Birman と Lin[2, 3]は，Vassiliev の仕事の後で Gusarov とは独立に有限型不変量の組合せ的な定義を与えている．

$\mathcal{K}$ で生成される自由 $\boldsymbol{Z}$ 加群を $\boldsymbol{Z}\mathcal{K}$ で表す．$\boldsymbol{Z}\mathcal{K}$ に以下のようにしてフィルトレーションを定義する．

特異結び目とは，S^1 から $\boldsymbol{R}^3$ へのはめ込みで，特異点として，有限個の「横断的な 2 重点」(以下，単に 2 重点と呼ぶ）のみを許すようなものである（図 2，図 3）．特に，結び目は 0 個の 2 重点を持つ特異結び目である．2 個の特異結び目は，像がイソトピックのとき同値なものとみなされる．n 個の 2 重点を持つ特異結び目の同値類からなる集合を $\mathcal{K}_n$ で表す．2 個の結び目がイソトピックであるための必要十分条件は，それらが特異結び目として同値であることである．よって，$\mathcal{K}$ は $\mathcal{K}_0$ と自然に同一視できる．前と同様に，$\mathcal{K}_n$ で生成される自由 $\boldsymbol{Z}$ 加群を $\boldsymbol{Z}\mathcal{K}_n$ で表す．

$K \in \mathcal{K}_n$ を n 個の 2 重点 $p_1, \cdots, p_n$ を持つ特異結び目とする．符号 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n \in \{+, -\}$ に対して，2 重点 p_i を符号 ϵ_i の交点（図 4）に置き換えて得られる結び目を $K_{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n}$ で表す．ここで，

$$\varphi_n(K) = \sum_{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n \in \{+,-\}} \left(\prod_{i=1}^{n} \epsilon_i \right) K_{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n}$$

と定義する．$\varphi_n(K)$ は 2 重点の順序の選び方には依存しない．φ_n は準同型

$$\varphi_n \colon \boldsymbol{Z}\mathcal{K}_n \to \boldsymbol{Z}\mathcal{K}$$

に拡張される．

各 $n \geq 0$ に対し，$\boldsymbol{Z}\mathcal{K}$ の $\boldsymbol{Z}$ 部分加群 J_n を

$$J_n = \varphi_n(\boldsymbol{Z}\mathcal{K}_n)$$

により定義する．定義より明らかに，包含関係

$$\boldsymbol{Z}\mathcal{K} = J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \cdots \tag{1}$$

が成り立つ．

アーベル群 A に値を持つ結び目の不変量 $f\colon \mathcal{K} \to A$ が次数が高々 n の**有限型不変量**（**Gusarov-Vassiliev 不変量**）であるとは，f の自然な拡張 $f\colon \boldsymbol{Z}\mathcal{K} \to A$ が，$f(J_{n+1}) = 0$ を満たすことをいう．A に値を持ち次数が高々 n の有限型不変量の全体からなるアーベル群を $I^n(A)$ と書くと，

$$I^n(A) \cong \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{Z}\mathcal{K}/J_{n+1}, A)$$

が成り立ち，包含関係

$$I^0(A) \subset I^1(A) \subset I^2(A) \subset \cdots$$

が成り立つ．A に値を持つ有限型不変量の全体

$$I^\infty(A) := \bigcup_{n \geq 0} I^n(A)$$

は，A に値を持つ不変量の全体 $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{Z}\mathcal{K}, A)$ よりも真に小さい．（例えば，$A = k$ が体のとき，$I^\infty(k)$ は可算無限次元であることがわかるが，$\mathcal{K}$ が可算無限集合であるので $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{Z}\mathcal{K}, k)$ は連続無限次元である．）

4. 結び目の加群のフィルトレーションの次数化とコード図

フィルトレーションが与えられると，その次数化を考えることは自然である．ここでは，結び目のフィルトレーション (1) の次数化について考える．

定義より，J_n は n 個の 2 重点を持つ特異結び目 $K \in \mathcal{K}_n$ に対する $\varphi_n(K)$ で，アーベル群として生成される．K_+, K_- は n 個の 2 重点を持つ特異結び目とし，K_+ の正の交点を負の交点に置き換えることにより，K_- が得られているとする．このとき，これらの交点を 2 重点に置き換えることにより，$n+1$ 個の 2 重点を持つ特異結び目 $K_\times \in \mathcal{K}_{n+1}$ を得る．このとき，

$$\varphi_n(K_+) - \varphi_n(K_-) = \varphi_{n+1}(K_\times) \in J_{n+1}$$

が成り立つ．このように n 個の 2 重点を持つ 2 個の特異結び目が互いに交差交換（交点の符号を入れかえること）で移りあうとき，これらの特異結び目は J_n/J_{n+1} において同じ元を代表することがわかる．n 個の 2 重点を持つ 2 個の特異結び目が互いに**ホモトピック**であるとは，それらがイソトピーと交差交換の有限列で移りあうこととする．$\bar{\mathcal{K}}_n$ によって，n 個の 2 重点を持つ特異結び目のホモトピー類の集合を表すことにする．φ_n は，全射準同型

$$\bar{\varphi}_n\colon \boldsymbol{Z}\bar{\mathcal{K}}_n \to J_n/J_{n+1}$$

を誘導する．

$\bar{K}_n$ の元は次に定義するコード図と呼ばれるものと 1 対 1 に対応する．n 次の**コード図**とは，円周 S^1 の有限部分集合を互いに交わらない，2 個の異なる元の組に分割したもの

$$\{\{p_1, p_1'\}, \cdots, \{p_n, p_n'\}\}$$

である．2 個のコード図は，S^1 の向きを保つ微分同相写像によって移りあうとき同じものとみなされる．

n 個の 2 重点を持つ特異結び目は，定義により可微分写像 $f\colon\ S^1 \to \boldsymbol{R}^3$ である．f の 2 重点 $p \in \boldsymbol{R}^3$ に対し，その逆像 $f(p) \subset S^1$ は相異なる 2 点からなる．各 2 重点の逆像の 2 点を組とするコード図が得られる．2 個の特異結び目が互いにホモトピックであることと，それらに対応するコード図が同じであるということは必要十分である．また，任意のコード図に対して，それを実現するような特異結び目が存在する．よって，n 次のコード図の集合は，n 個の 2 重点を持つ特異結び目のホモトピー類の集合 $\bar{\mathcal{K}}_n$ と自然に同一視することができる．

コード図を考えるときには，円周 S^1 の対応する 2 点を点線により結んで表すと便利である．点線を**コード**（弦）と呼ぶ．例えば，次数 3 以下のコード図をすべて列挙すると，図 5 のようになる．このように，各 $n \geq 0$ に対して，$\bar{\mathcal{K}}_n$ は有限集合である．

5. コード図の空間 $\mathcal{A}_n$

一般に準同型 $\bar{\varphi}_n$ は同型ではない．$n \geq 0$ に対し，部分加群 $R_n \subset \boldsymbol{Z}\bar{\mathcal{K}}_n$ を次の 2 個のタイプの

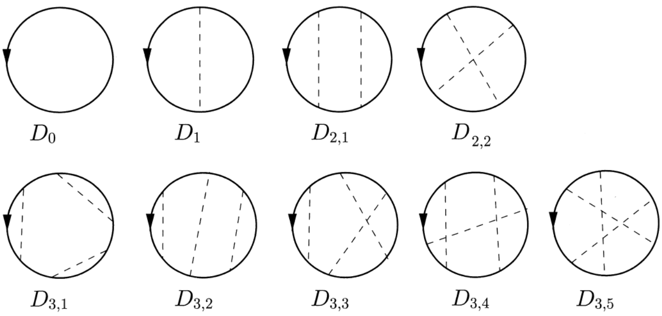


図 5　次数 3 以下のコード図.

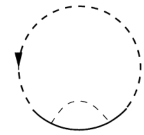


図 6　R_n のタイプ 1 の生成元.

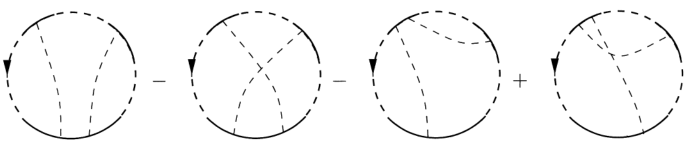


図 7　R_n のタイプ 2 の生成元.

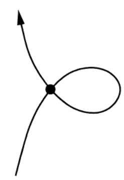


図 8　タイプ 1 の生成元の特異結び目による実現.

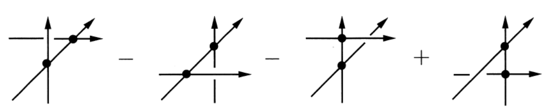


図 9　タイプ 2 の生成元の特異結び目による実現.

元により生成されるものとする.

まず，タイプ 1 の生成元は，コード図で，1 つのコードの端点で S^1 を 2 個の弧に分けたとき，一方の弧が他のコードの端点を含まないものである (図 6).

タイプ 2 の生成元は，4 個のコード図の線型結合で，図 7 のようなものである.

$n \geq 0$ に対し，

$$\mathcal{A}_n = \boldsymbol{Z}\bar{\mathcal{K}}_n / R_n$$

と置き，コード図の空間と呼ぶ．例えば，$0 \leq n \leq 3$ のときは，

$$R_0 = 0,$$
$$R_1 = \mathrm{Span}_{\boldsymbol{Z}}\{D_1\},$$
$$R_2 = \mathrm{Span}_{\boldsymbol{Z}}\{D_{2,1}\},$$
$$R_3 = \mathrm{Span}_{\boldsymbol{Z}}\{D_{3,1}, D_{3,2}, D_{3,3}, 2D_{3,4} - D_{3,5}\}$$

が成り立つので，

$$\mathcal{A}_0 \cong \boldsymbol{Z}, \quad \mathcal{A}_1 \cong 0, \quad \mathcal{A}_2 \cong \boldsymbol{Z}, \quad \mathcal{A}_3 \cong \boldsymbol{Z}$$

が成り立つ.

$\bar{\varphi}_n(R_n) = 0$ であることが以下のようにしてわかる．まずタイプ 1 の生成元 D に対して，それを代表するような特異結び目 K で，図 8 のような部分を含むようなものが存在することがわかる．このとき，$\varphi_n(D) = 0$ であることは容易にわかる．また，タイプ 2 の生成元に対して，それを代表するような 4 個の特異結び目 K の線型結合 $D_1 - D_2 - D_3 + D_4$ で，図 9 のような部分を含むようなものが存在することがわかる．このときも，$\varphi_n(D_1 - D_2 - D_3 + D_4) = 0$ であることが簡単な計算によりわかる．以上より，

$$\bar{\varphi}_n(R_n) = 0$$

であることがわかった.

上で示したことより，$\bar{\varphi}_n$ は全射準同型

$$\tilde{\varphi}_n\colon \mathcal{A}_n \to J_n/J_{n+1} \tag{2}$$

を誘導することがわかる.

6. 枠つき結び目

以下の説明の都合上，結び目の概念を枠つき結び目に一般化して考える．**枠つき結び目**とは，結

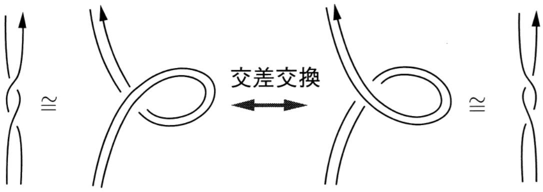


図 10　枠つき結び目の交差交換の例．

び目 K に並行して走るもう 1 つの結び目 K' が与えられたものである．K' は K の「ねじれ具合」を表し，K の**枠**と呼ばれる．いつものように，イソトピックな枠は同じものとみなされる．枠つき結び目の交差交換においては，結び目が保たれる場合であっても，枠は保たれない（図 10）．

枠つき結び目についても，有限型不変量の理論を同様に考えることができるが，R_n のタイプ 1 の生成元が φ によって，0 に移らないことがわかる．実際，R_n のかわりに，タイプ 2 の生成元のみで生成される $\boldsymbol{Z}\bar{\mathcal{K}}_n$ の部分加群 R_n^{II} を使えば，(2) と同様の全射準同型があることがわかる[*1]．

以下では，枠つき絡み目について，考察する．

$$\mathcal{A}_n = \boldsymbol{Z}\bar{\mathcal{K}}_n / R_n^{\mathrm{II}}$$

により，$\mathcal{A}_n$ を再定義する．J_n などは枠つき結び目に対するものを表すことにする．

7. Kontsevich 積分

$\mathcal{A}_n^{\boldsymbol{Q}} = \mathcal{A}_n \otimes_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Q}$ と置く．枠つき結び目の **Kontsevich 積分**は

$$\mathcal{A}^{\boldsymbol{Q}} := \prod_{n \geq 0} \mathcal{A}_n^{\boldsymbol{Q}}$$

に値を持つ不変量である．紙数の都合上，Kontsevich 積分の定義を述べることはできないが，その性質について説明する．枠つき結び目 K の Kontsevich 積分を

$$Z(K) = \sum_{n \geq 0} Z_n(K), \quad Z_n(K) \in \mathcal{A}_n^{\boldsymbol{Q}}$$

と書くことにする．

$n \geq 0$ に対して，Kontsevich 積分の n 次までの項を集めたもの

$$Z_{\leq n}(K) = \sum_{i=0}^{n} Z_i(K) \in \mathcal{A}_{\leq n}^{\boldsymbol{Q}} := \bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{A}_i^{\boldsymbol{Q}}$$

は，高々 n 次の有限型不変量であって，しかも，有理数体上のベクトル空間に値を持つ高々 n 次の有限型不変量の中で普遍的なものである．つまり，任意のそのような有限型不変量は $Z_{\leq n}$ を経由する．この普遍性は別の言い方をすると，$Z_{\leq n}$ が同型

$$Z_{\leq n} \colon (\boldsymbol{Z}\mathcal{K}/J_{n+1}) \otimes_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Q} \to \mathcal{A}_{\leq n}^{\boldsymbol{Q}}$$

を誘導することと同じである．この同型の n 次の部分

$$Z_n \colon (J_n/J_{n+1}) \otimes_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Q} \to \mathcal{A}_n^{\boldsymbol{Q}}$$

も同型であり，

$$\tilde{\varphi}_n \otimes \boldsymbol{Q} \colon \mathcal{A}_n^{\boldsymbol{Q}} \to (J_n/J_{n+1}) \otimes_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Q}$$

の逆写像であることがわかる．

8. リー代数に付随する枠つき結び目不変量

Kontsevich 不変量は有限型不変量の組合せ的な特徴付けを与えているが，次数 n が大きくなるにつれて，空間 $\mathcal{A}_n^{\boldsymbol{Q}}$ の構造はとても複雑になり，枠つき結び目 K に対して $Z_n(K)$ をすべて計算するのは困難である．ここでは，リー代数とその対称不変 2 テンソルに対して，Kontsevich 積分 Z から自然に不変量が抽出できることを説明する．

L を $\boldsymbol{Q}$ 上のリー代数とする．

$$t = \sum_i t_i' \otimes t_i'' \in L \otimes L$$

が L の**対称不変 2 テンソル**であるとは，

$$\sum_i t_i'' \otimes t_i' = t,$$

$$\sum_i [x, t_i'] \otimes t_i'' + \sum_i t_i' \otimes [x, t_i''] = 0$$

---

*1）ただし，結び目と枠との絡み数は交差交換によって ±2 だけ変化するので，この絡み数の偶奇は交差交換の不変量になっている．つまり，すべての枠つき結び目が交差交換のもとで同値ではない．このようなあまり本質的でないことを考慮して定義を補正する必要があるが，ここでは省略する．

が任意の $x \in L$ に対して成り立つことをいう．L が有限次元単純リー代数のときは，L のキリング形式の双対として，非退化な対称不変 2 テンソルが得られる．以下では，t はそのような非退化なものであってもよいし，そうでなくてもよい．例えば極端な場合として，$t = 0 \in L \otimes L$ も対称不変 2 テンソルである．以下，対称不変 2 テンソル t を固定する．

$U(L)$ を L の普遍包絡代数とする．$n \geq 0$ に対し，線型写像

$$E_n\colon \mathcal{A}_n^{\boldsymbol{Q}} \to U(L) \tag{3}$$

を次のように定義する．コード図 D が与えられたとする．D のコードの端点でない S^1 上の点 p_0 を選ぶ．各コードの 2 個の端点に対称不変 2 テンソル t をおいて，S^1 上においたすべての元を p_0 からはじめて S^1 の向きに沿って書き並べたものを $E_n(D) \in U(L)$ と定義する．例えば，図 3 の特異枠つき結び目に対応するコード図 $D_{2,2}$（図 5）に対しては，図 11 のようにして，

$$E_2(D_{2,2}) = \sum_{i,j} t'_i t'_j t''_i t''_j$$

となる．対称不変 2 テンソルの定義より，$E_n(D)$ は p_0 の選び方によらないので，

$$E_n\colon \boldsymbol{Q}\bar{\mathcal{K}}_n \to U(L)$$

が定義される．しかもタイプ 2 の R_n の生成元に対して E_n は消えていることが，不変対称 2 テンソルの定義からわかる．よって，(3) のように E_n が定義できる．さらに，不変対称 2 テンソルの定義から，$E_n(\mathcal{A}_n^{\boldsymbol{Q}})$ が $U(L)$ の中心に含まれていることもわかる．

Kontsevich 不変量と E_n を組合せることによって，形式的巾級数環 $U(L)[[h]]$ に値を持つ不変量

$$W^{L,t}(K) := \sum_{n \geq 0} E_n(Z_n(K))h^n \in U(L)[[h]]$$

が定義される．L が有限次元単純リー代数で，t がキリング形式の双対である場合には，$W^{L,t}(K)$ は L に付随する量子包絡代数 $U_q(L)$ を使って定義される普遍量子不変量[8,9,11]と同等になる．

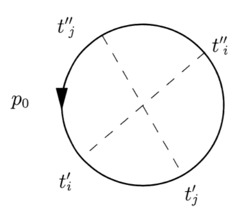


図 11　$E_2(D_{2,2})$ の計算．

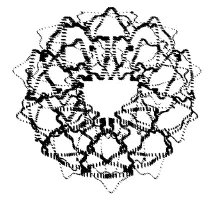
参考文献

1) D. Bar-Natan, On the Vassiliev knot invariants, *Topology*, **34** (1995), 423–472.
2) J.S. Birman, New points of view in knot theory, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **28** (1993), 253–287.
3) J.S. Birman and X.-S. Lin, Knot polynomials and Vassiliev's invariants, *Invent. Math.*, **111** (1993), 225–270.
4) M.N. Gusarov, A new form of the Conway-Jones polynomial of oriented links, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI), 193 (1991), Geom. i Topol. 1, 4–9, 161.
5) V.F.R. Jones, A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, *Ann. of Math. (2)*, **126** (1987), 335–388.
6) C. Kassel, Quantum groups, Springer-Verlag, New York, 1995.
7) M. Kontsevich, Vassiliev's knot invariants. I.M. Gel'fand Seminar, 137–150, Adv. Soviet Math., 16, Part2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
8) R.J. Lawrence, A universal link invariant using quantum groups. Differential geometric methods in theoretical physics (Chester, 1988), 55–63, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.
9) T. Ohtsuki, Colored ribbon Hopf algebras and universal invariants of framed links, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **117** (1995), 259–273.
10) T. Ohtsuki, Quantum invariants, A study of knots, 3-manifolds, and their sets, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.
11) N. Yu. Reshetikhin, Quasitriangle Hopf algebras and invariants of tangles, *Algebra Anal.*, **1** (1989), 169–188.
12) V.A. Vassiliev, Cohomology of knot spaces, Theory of singularities and its applications, 23–69, Adv. Soviet. Math., 1, Amer. Math. Soc., 1990.

（はびろ・かずお，京都大学数理解析研究所）

体積予想

量子不変量と双曲体積の思いがけない対応



村上　順

1. はじめに

ジョーンズ多項式の発見を契機に数多く構成された結び目の量子不変量は，統計力学における可解格子模型とも関係するそれまでにはなかったタイプの不変量である．様々な構成法があるが，基本的には，結び目の射影図から構成されるものであり，補空間の幾何的性質との直接的な関係は何も知られていなかった．私自身も，量子不変量は2次元と3次元の間の，どちらかというと2次元的なものしか見ていない不変量ではないか，と考えていた．ところが，カシャエフは，体積の量子化を目指して，量子2重対数関数から結び目の不変量 K_N を構成し，双曲結び目 L に対して，$K_N(L)$ から補空間の双曲体積 Vol_L が次で得られると予想した[2]．ここで，K_N は自然数 N ごとに定義される不変量である．

カシャエフの予想

$$\mathrm{Vol}_L = \lim_{N\to\infty} \frac{2\pi \log|K_N(L)|}{N} \tag{1}$$

それまでは，量子不変量と幾何学的な計量との直接的な対応が全く知られてなかったので，どんな不変量が構成されたのか非常に不思議だったのだが，よく調べてみると，この不変量はカラードジョーンズ不変量の特別な場合であることがわかり，予想も，双曲結び目だけでなく，一般の結び目にも適用できる形に拡張された[6]．これが**体積予想**である．

この予想はまだ解けていないのであるが，補空間の幾何構造と不変量との関係については，横田により明瞭な説明が与えられ，幾何構造を決めるための方程式が不変量から自然に得られることがわかった[13]．また，予想自体も，複素化された体積に拡張されたり，対数型共形場理論とも関係してくるなどの広がりを見せている．

さらに，体積予想をきっかけとして，量子不変量と結び目補空間の幾何学的性質との様々な関係がわかってきており，体積予想は量子不変量の新しい側面を明らかにしたといえよう．

2. 結び目補空間とその双曲構造

量子不変量が発見されるまでは，結び目の不変量としては，結び目解消数のような素朴な不変量と，結び目補空間の幾何から得られる不変量が主に研究されてきた．結び目補空間とは，次のようにして構成される3次元の多様体のことである．結び目をつくる紐の両端点をを無限に遠くに持っていくことで，図1の左図のようになる．ここで，$\mathbb{R}^3$ が3次元球体 D^3 と同相なことを用いると，結び目を図1のような D^3 中の結び目と見ることができる．D^3 中の結び目に沿ってトンネルを掘ることで，D^3 からトンネルを除いた部分が，境界がトーラスと同相な3次元の立体図形となる．これを結び目の補空間と言う．

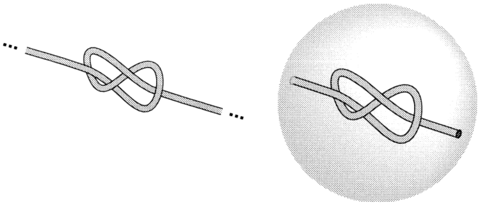


図1　8の字結び目とその補空間.

W. サーストンらの研究により，多くの結び目の補空間は双曲空間の商空間として実現できることが知られており，このようなものを**双曲結び目**と言う．双曲空間とは，いたる所曲率が -1 であるような負曲率の定曲率空間で，ユークリッドの平行線公理の成り立たない3次元の非ユークリッド幾何の空間としてもよく知られたものである．商空間として実現された補空間は，双曲空間に標準的に定義される体積に関して有限な体積を持ち，これを双曲体積と呼んでいる．図1での8の字結び目の補空間にも双曲構造が入り，2つの理想正四面体を使った構成法が与えられている[12)]．ちなみに，理想四面体とは，双曲空間内の四面体の頂点を無限遠方まで持っていったもので，図2のような頂点の近くでは尖った形になり，体積は有限のままである．

カシャエフの予想 (1) は，この双曲体積が，彼の構成した不変量 K_N で表現できると言っている．理想四面体の体積は2重対数関数 $\mathrm{Li}_2(x)$（コラム1参照）と関係するので，その量子化から体積の量子化を構成しようというのが動機なのであるが，実際に (1) で体積が求まるということをどのようにして発見したのであろうか．彼によると，自分の定義した不変量を既知の不変量と比べようとしたのであるが，たまたま見た結び目の本にジョーンズ多項式と双曲体積という2つの不変量が載っており，ジョーンズ多項式とは違っていたので，双曲体積と比べてみたところ，(1) の関係を見つけた，ということである．

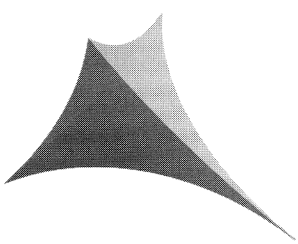


図2　双曲空間の理想正四面体.

3. カシャエフの発見

カシャエフは2重対数関数 Li_2 の q-変形を構成し，これがまた5項関係式を満たすことを示した．さらに，結び目の交点のまわりでのある四面体分割から，交点に対応する R-行列を得て，結び目不変量を構成した．この過程は結構複雑なのであるが，結局のところ，Li_2 の q-変形として得られたものは，Li_2 の定義の積分で変数 t を e^{is} と変数変換して，s に関する $\log(1-e^{is})$ の積分を離散化し，s についての適当な細分に関する和に置き換えたものである．この和を指数関数の肩にのせると次の q-級数となる．

q-級数
$$(q)_n = \prod_{k=1}^{n}(1-q^k). \tag{2}$$

向き付けられた結び目の不変量 K_N は，q-級数を用いた次のもので構成される．交点のまわりの紐に図3のようにつけられた0から $N-1$ までの番号に対して，次の数

$$R^{kl}_{ij} = \frac{N\,q^{-1-(k-j)(i-l+1)}\,\theta_{ijkl}}{(\bar{q})_{[i-j]}(q)_{[j-l]}(\bar{q})_{[l-k-1]}(q)_{[k-i]}},$$
$$\bar{R}^{kl}_{ij} = \frac{N\,q^{1+(k-j)(i-l+1)}\,\theta_{ijkl}}{(q)_{[i-j]}(\bar{q})_{[j-l]}(q)_{[l-k-1]}(\bar{q})_{[k-i]}} \tag{3}$$

を対応させる．ここで $[n] = n \mod N$, $0 \le [n] \le N-1$ とし，

$$\theta_{ijkl} = \begin{cases} 1 & [i-j]+[j-l]+[l-k-1] \\ & \quad +[k-i] = N-1 \\ 0 & その他 \end{cases}$$

とする．この R を行列と考え，**R-行列**と呼ぶ．

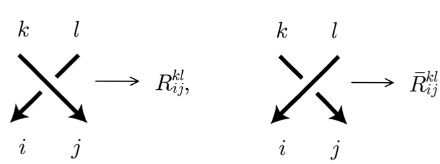


図3　交点に対応する R.

コラム 1：2 重対数関数 $\mathrm{Li}_2(x)$

2 重対数関数は正の実数 x に対して右の積分で定まる関数の解析接続により定義される．双曲体積に関する論文ではロバチェフスキー関数がよく出てくるが，これは実数 x に対して $Л(x) = \int_0^x |2\sin t|\,dt$ と定義されるものである．2 重対数関数を使うと $Л(x) = \mathrm{Im}\,\mathrm{Li}_2(e^{2ix})$ とかくことができる．Li_2 は q-級数の連続化のように思え，複素関数としても考えやすいので，本稿では 2 重対数関数で説明している．$\mathrm{Li}_2(x)$ は対数関数 $\log x$ に近いものであり，次のような性質がある．まずは，$\log(1-x)$ のベキ級数展開 $x + x^2/2 + \cdots + x^k/k + \cdots$ に対応して

$$\mathrm{Li}_2(x) = -\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t}\,dt$$

$$\mathrm{Li}_2(x) = x + x^2/2^2 + \cdots + x^k/k^2 + \cdots$$

が成り立つ．また，対数で成り立つ $\log xy = \log x + \log y$ を一般化したような関係式も数多く知られているが，次の 5 項関係式が理想四面体の 2-3 変形（図 4）と対応し，これが双曲体積との関係を端的に表している．

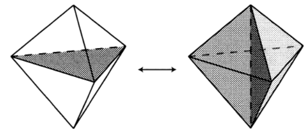


図 4　理想四面体の 2-3 変形．

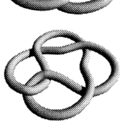
$$\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(y) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{1-x}\frac{y}{1-y}\right) = \mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{1-y}\right) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{y}{1-x}\right) - \log(1-x)\,\log(1-y).$$

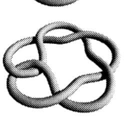
このような関係式は微分することで対数関数の性質に帰着されるが，対数関数が複素数に対して多価関数であるのと同様，Li_2 も多価関数となり，実際の計算ではどの分岐をとるべきか注意が必要になってくる．

これをもとに，結び目の図の各辺（紐の交点から交点までの部分）にそれぞれ 0 から $N-1$ までの数を対応させ，統計物理の状態和模型の考え方を用いて K_N が定義される．詳しくは文献 10) などを参照してほしい．

カシャエフは $4_1, 5_2, 6_1$ という記号で表される 3 つの結び目についての計算から，式 (1) を予想した．ただし，4_1 とは，8 の字結び目のことである．この 3 つの結び目に対し，彼の定義した不変量 K_N は q-級数を用いて次のように表される．ここで $q = e^{2\pi i/N}$ である．

4_1  $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} |(q)_k|^2,$

5_2  $\displaystyle\sum_{0\le k\le l}^{N-1} \frac{(q)_l^2}{(\bar{q})_k} q^{-k(l+1)},$

6_1  $\displaystyle\sum_{0\le k+l\le m}^{N-1} \frac{|(q)_m|^2}{(q)_k(\bar{q})_l} q^{(m-k-l)(m-k+l)}.$

q-級数と Li_2 との関係から，N が大きくなると大雑把に次が成り立つ．

$$K_N(L) \underset{N\to\infty}{\sim} \int e^{\frac{i\,N\,V_L(z,u,\cdots)}{2\pi}}\,dz\,du\cdots \qquad (4)$$

ただし，

$$\begin{aligned}
V_{4_1} &= \mathrm{Li}_2(z) - \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right),\\
V_{5_2} &= 2\mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{u}\right) + \alpha(z,u) - \frac{\pi^2}{2},\\
V_{6_1} &= \mathrm{Li}_2(z) - \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) - \mathrm{Li}_2(u)\\
&\qquad + \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{v}\right) + \alpha\left(\frac{uv}{z}, \frac{z}{u}\right)
\end{aligned}$$

とし，積分の範囲は元の和の範囲に対応するように定める．ここで，$\alpha(u,v) = \log(u)\log(v)$ である．q-級数で表されたものをこのように Li_2 で書き直したものを**ポテンシャル関数**と呼ぶ．この積分の N に関する漸近挙動は積分範囲がある適切な条件を満たせば，**鞍点法**により主要項が求まる．N が大きくなるにつれ激しく振動する振動積分であるが，全微分が消えている点（ここを鞍点と言う）$(z_0, u_0, \cdots)$ では振動が止まり，

$$\int e^{\frac{i\,N\,V_L(z,u,\cdots)}{2\pi}}\,dz\,du\cdots \underset{N\to\infty}{\sim} e^{\frac{i\,N\,V_L(z_0,u_0,\cdots)}{2\pi}}$$

となる．カシャエフは V_L のある鞍点での値の虚部が補空間の双曲体積になっていることを左の 3 つの結び目で確かめたのである．鞍点法が使える保証は 8 の字結び目 4_1 の場合しかなかったのであるが，他の 2 つの結び目についても，数値計算で予想 (1) を確かめた（コラム 2 参照）．

2つの謎　カシャエフの論文には2つ謎があって受け入れられるのに時間がかかった.

謎1　K_N は本当に結び目の不変量か？

K_N そのものではなく，その絶対値が不変量になるというのであるが，構成法が複雑で結び目の研究者になかなか理解されなかった.

謎2　どうして体積が出てくるのか？

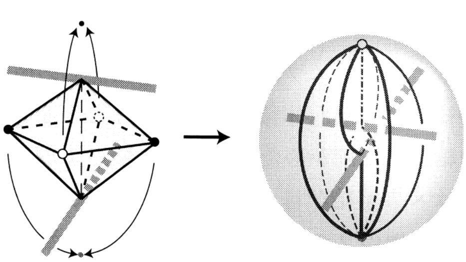
量子不変量から体積のような幾何学的によく知られた量が直接出てくるような例がこれまで全く知られていなかったため，どのようにして体積と関係するのか非常に不思議であった.

謎1については，文献6) により，K_N の R-行列とカラードジョーンズ不変量の R-行列とが離散フーリエ変換で対応することが示され，確かに不変量であることが確認された.

謎2については，これがわかれば体積予想が解決するのだが，残念ながら完全にはわかっていない．しかし，次に述べる横田理論により，K_N に対応するポテンシャル関数の鞍点での値と，双曲体積や双曲構造との関係が明らかにされた.

4. 横田理論

D. サーストンにより，カラードジョーンズの R-行列の5個の q-級数に対応する交点のまわりでの四面体分割が提案された．横田は，これをもとに (3 の4個の q-級数と対応する四面体分割を構成し，ポテンシャル関数の鞍点との関連を調べた．K_N に対応する四面体分割は図5で与えられる．縦の軸に沿って4つの四面体を貼り合わせてできる八面体を左図のように交点の2本の紐で挟むように置き，紐についていない4つの頂点を図のように2つは北極に，残りの2つは南極に動かして右図のようにする．これは図1での球の中での1つの交点のまわりでの四面体分割の様子を表している．8の字結び目の場合は，交点が4つあるので，16個の四面体での分割ということになるが，実際にはほとんどがつぶれてしまって，サーストンの2つの四面体による分割と同じものが得られる.


図5　交点での四面体分割.

ここで，ポテンシャル関数の微分が消えるための条件を，四面体分割と比べて次の定理が得られる.

定理（横田）
ポテンシャル関数でのパラメータを理想四面体の形を決めるパラメータと見ると，微分が消える条件は各四面体がきれいに貼り合わさって補空間に完備な双曲構造を与えるための条件となる．さらに，ある鞍点でのポテンシャル関数の値の虚部が双曲体積と一致する.

5. 楽観的極限

式 (1) のような関係は3次元閉多様体では成り立たないのであろうか．3次元多様体に対してはカラードジョーンズ不変量から作られるレシェティヒン-トラエフ不変量 τ_N があるが，この不変量に対しては，残念ながら同様の関係式は成り立たない．K_N は q が1の N 乗根のときの sl_2 の N 次元表現に対応するカラードジョーンズなのであるが，τ_N は1次元から $N-1$ 次元表現に対応するカラードジョーンズで構成されている．そして，カシャエフの不変量が N に関して指数関数オーダーで増大するのに対し，1次元から $N-1$ 次元表現に対応するカラードジョーンズの絶対値は高々多項式オーダーでしか増大せず，τ_N も同様である．しかし，あきらめずに τ_N に対応するポテンシャル関数に鞍点法を使ってみよう．すると，そこでの値はやはり双曲体積に対応しているのである[4]．τ_N から体積が直接出てこないのは，鞍点法を適用するための条件が揃っていないから

コラム 2：8 の字結び目の場合の体積予想の証明

8 の字結び目の場合には式 (1) を初等的に示すことができる[3]．$\sum_{k=0}^{N-1}|(q)_k|^2$ の各項を a_k とすると，図 6 のようになり，$\frac{k_0}{N}$ がだいたい $\frac{5}{6}$ になるように k_0 をとるとき，a_{k_0} が a_k のなかで最大になる．任意の k に対して a_k が正の実数なので $a_{k_0} < \sum_{k=0}^{N-1} a_k < N a_{k_0}$ となり，はさみうちの原理を使うと $\lim_{N\to\infty} 2\pi \log K_N(4_1)/N = \lim_{N\to\infty} 2\pi \log a_{k_0}/N$ となる．q-級数 $(q)_{k_0}$ と 2 重対数関数の関係から

$$\lim_{N\to\infty}\frac{2\pi\log K_N(4_1)}{N} = i\left(\mathrm{Li}_2(e^{\frac{5\pi i}{3}}) - \mathrm{Li}_2(e^{-\frac{5\pi i}{3}})\right)$$

となるが，これは 8 の字結び目の双曲体積と等しい．実際の値は 2.02... で，理想正四面体の体積の 2 倍である．もちろん，これは補空間が 2 つの理想正四面体で分割できることに対応している．

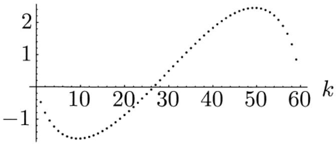


図 6　$N=60$ での $\frac{2\pi\log a_k}{N}$ のグラフ．

で，鞍点を与える条件式と双曲構造を与える関係式とはこの場合でも見事に対応している．文献 4) では，このようにして体積を求める計算を**楽観的極限**と呼んでいる．楽観的極限という意味では，式 (1) は横田理論により成立しており，本当に鞍点法を適用できるかという部分だけが未解決なのである．

6. 体積予想の一般化

視点を変え，N に関して指数関数的に増大する不変量について，その体積との関係を調べてみよう．K_N が指数関数的に増大するということは，q を 1 の N 乗根から少しずらしても指数関数的に増大するわけだが，これが結び目補空間を変形したものの双曲体積と対応することがグコフにより示唆され，村上斉らにより詳しく調べられている[5]．

q を変形する代わりに，表現を変形するいう手段もある．リジディティといって，既約表現は通常は本質的な変形ができないものなのだが，q が 1 の N 乗根のときの量子群 $\mathcal{U}_q(sl_2)$ の N 次元表現は例外で，本質的に異なる表現に連続的に変形することができる．これに伴い．K_N も連続的に変形される．実は，このように変形した不変量は既に阿久津–出口–大槻により構成されており，**カラードアレキサンダー不変量**と呼ばれ，補空間を変形したものの体積ともうまく関係することが予想されている[8]．

複素化された体積　結び目補空間の自然な双曲構造 (完備双曲構造と言われるもの) は，完備でない双曲構造まで考えると複素パラメータ 1 つ分だけ変形することができる．これを z とすると，変形された補空間の体積は z に関して解析的になる．z が複素数として変形するので，体積も z に関する複素関数に拡張され，その実部が双曲体積となる．この複素関数は，上の K_N の変形に対応するポテンシャル関数の鞍点での値として具体的に構成できる．ところで，この関数の虚部は一体何を表すのだろうか．実際に計算してみると**チャーン–サイモンズ不変量**に対応することがわかる．そこで，次のような複素化された体積予想が提唱された[7]．

$$\lim_{N\to\infty}\frac{2\pi\log K_N(L)}{N} = \mathrm{Vol}_L + i\,CS_L \pmod{\pi^2 i} \tag{5}$$

CS_L が L の補空間のチャーン–サイモンズ不変量である．

もし，(5) が成り立つとすると，虚部についても横田理論と同様の結果を期待したくなる．結び目補空間のチャーン–サイモンズ不変量についてはノイマンが理想四面体にる分割からのアプローチを行っていたが，最近，ジッカートはこれをもとに各四面体の局所的なデータから複素化された体積を得る方法を構成した[14]．量子不変量から得られるポテンシャル関数は，それぞれの四面体に対応する 2 重対数関数を含んでおり，ポテンシャル関数の実部が体積と対応していた．そこで，この

四面体に対応する2重対数関数とジッカートの理論との関係がわかれば横田理論の複素化ができるはずであり，現在研究が進められている．

***A*-多項式との関係** 結び目補空間の変形を特徴づけるものとして，A-多項式というものも導入されている．これは，境界のトーラスの縦方向と横方向の関係を示す2変数の多項式なのだが，変形に対応するポテンシャル関数の鞍点を与える方程式系から変数を消去することで得られることがわかる．これも体積予想の一つの応用といっていいであろう．

体積の量子化 3次元閉多様体 M のレシェティヒン-トラエフ不変量 τ_N の絶対値は N に関して高々多項式オーダーでしか増大しないことがわかっているが，楽観的極限は複素化された体積と対応している．一方，カラードアレキサンダー不変量は N に関して指数関数的に増大し，体積とも直接対応している．カラードアレキサンダーのカラーは非整数で，カラードジョーンズのカラーは整数であるが，カラードアレキサンダー不変量でもカラーを整数に特殊化したものに対応する不変量が構成できる．これは対数的共型場理論[1]に関係するので**対数的不変量**と呼んでいる[9]．この不変量は，カラーが整数でありながら，双曲結び目に対しては指数関数的に増大するものであり，体積と直接対応している．そこでカラードジョーンズからレシェティヒン-トラエフ不変量を作ったように，対数的不変量から3次元閉多様体の不変量が作れれば，指数関数的に増大し，体積と直接関係する量子不変量ができて，閉多様体の体積の量子化に当たるものができるのではないかと考えている．

7. 終わりに

当初は2次元的なものと思われた量子不変量から，N に関する漸近的な挙動を見ることで3次元的な量を得ることができた．これは，有限型不変量やコバノフホモロジーなどとは全く違った視点であり，主要項の次の項に対応する量が何を表すかなど，まだまだ不明なことが多い．

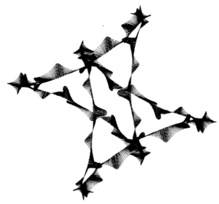
また，体積予想を表現論の立場から見てみると，ちょうど標準的な理論が使えなくなるところに対応している．半単純性が成り立たなくなるところ，ユニタリティが成り立たなくなるところ，あるいは双対性が崩れるところである．体積予想に限らず，この境目あたりを調べることで，様々な面白い現象が見つかるのではないかと期待している．

参考文献

1) B. Feigin, A. Gainutdinow, A. Semikhtov and I. Tipunin, Modular group representations and fusion in logarithmic conformal field theories and in the quantum group center, *Comm. Math. Phys.* **265** (2006), 47–93.
2) R. Kashaev, The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm, *Lett. Math. Phys.* **39** (1997), 369–275.
3) 小島定吉,『3次元の幾何学』, 朝倉書店, 2002年.
4) H. Murakami, Optimistic calculations about the Witten-Reshetikhin-Turaev invariants of closed three-manifolds obtained from the figure-eight knot by integral Dehn surgeries, Recent progress towards the volume conjecture (Kyoto, 2000). 数理解析研究所講究録 **1172** (2000), 70–79.
5) H. Murakami and Y. Yokota, The colored Jones polynomials of the figure-eight knot and its Dehn surgery spaces, *R. Reine Angew. Math.* **607** (2007), 47–68.
6) H. Murakami and J. Murakami, The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot, *Acta Math.* **186** (2001), 85–104.
7) H. Murakami, J. Murakami, M. Okamoto, T. Toshie and Y. Yokota, Kashaev's conjecture and the Chern-Simons invariants of knots and links, *Experiment. Math.* **11** (2002), 427–435.
8) J. Murakami, Colored Alexander invariants and cone-manifolds, *Osaka J. Math.* **45** (2008), 541–564.
9) J. Murakami and K. Nagatomo, Logarithmic knot invariants arising from restricted quantum groups, *Internat. J. Math.* **19** (2008), 1203–1213.
10) 村上 順,『結び目と量子群』, 朝倉書店, 2000年.
11) N. Tamura and Y. Yokota, A formula for the A-polynomials of $(-2, 3, 1+2n)$-pretzel knots, *Tokyo J. Math.* **27** (2004), 263–273.
12) W. サーストン, S. レヴィ,『3次元幾何学とトポロジー』(小島定吉訳, 培風館), 1999年.
13) Y. Yokota, On the volume conjecture for hyperbolic knots, arXiv:math/0009165.
14) C. Zickert, The Chern-Simons invariant of a representation, arXiv:0710.2049 (2007).

(むらかみ・じゅん, 早稲田大学理工学術院)

結び目の不変量と位相的弦理論



菅野 浩明

1. はじめに

結び目と絡み目の不変量については古典的な不変量としてアレクサンダー多項式が知られていましたが，1980 年代にジョーンズ多項式をはじめとして新しいタイプの不変量が数多く発見されました．ジョーンズ多項式が作用素環の研究から生み出されたことからも分かるように，この後，結び目理論と様々な分野の関係が明らかになり，その研究は拡がりをもつようになりました．私が結び目理論を知るようになったのは大学院の学生時代で，それは 1987 年から 1988 年にかけてウィッテンが位相的場の理論を提唱したのがきっかけでした．ウィッテンは 3 次元の位相的ゲージ理論であるチャーン・サイモンズ理論の相関関数が結び目や絡み目の量子不変量を与えると主張しました[1]．チャーン・サイモンズ理論による不変量の定義は径路積分を用いているため，数学的に厳密であるとはいえませんが，チャーン・サイモンズ理論によって 1980 年代に数多く発見された新しいタイプの不変量を統一的に理解することができます．それだけでなくチャーン・サイモンズ理論による定式化は数学と物理にまたがる結び目理論の拡がりを最も自然に説明できるものとなっています．実際，本稿の主題である結び目理論と位相的弦理論の関係もチャーン・サイモンズ理論を通して発見されたものです．これに対して，より数学的な立場から量子不変量を統一的に説明するのが量子群の表現論による定義といえます．詳細は省略しますが，この定義では結び目や絡み目が組紐の同値類を使って表すことができるという事実を使います．一方，可解模型の研究から生まれたヤン・バクスター方程式の解として得られる普遍 R 行列を用いて組紐への作用が定義できます．これを利用して結び目や絡み目を表す組紐の同値類の取り方によらない不変量を定義することができます．量子群はドリンフェルトと神保によって導入されたとされていますが，これまでに登場したジョーンズ，ウィッテン，ドリンフェルトの 3 人がいずれも 1990 年に京都で開催された国際数学者会議でフィールズ賞を受賞していることは，その当時の結び目理論をめぐる状況をよく物語っていると思います．

このように結び目や絡み目の量子不変量は量子群の表現である普遍 R 行列や場の量子論の相関関数と関係しているという点で「量子」という名にふさわしいものです．一方，古典的に最も有名な位相不変量である多面体のオイラー数は多面体の頂点や辺や面の数を数えて，その交代和をとることによって定義されます．これは代数的位相幾何学において n 次コホモロジー群の次元であるベッチ数 b_n の交代和として定義されるオイラー標数 $\chi := \sum_n (-1)^n \cdot b_n$ に一般化されます．しかしチャーン・サイモンズ理論や普遍 R 行列を用いて定義した結び目や絡み目の量子不変量は，このままでは何らかの対象を「数える」ことによって定義する不変量のイメージとは直接結びつきません．量子不変量が何らかの意味で量子論と関係しているとするならば，オイラー標数の定義を念頭に置いて量子論における自然な数え上げとは何かという問が生じます．そこで量子論の基本的枠組みを振り返ると，それは量子状態の数え上げであるという答えにたどり着きます．本稿では結び目や絡み目の量子不変量を位相的弦理論におけるある種の量子状態の数え上げとして理解する試みについて紹介します．量子状態の数え上げが位相不変量を与えるためには，状態数が連続的な変形に対して不変でなければならないので，どんな状態を数えてもよいというわけではありません．状態の数え上げが位相不変量を与えるのは超対称理論における BPS 状

態と呼ばれる特殊な状態です．

本稿の後半で説明するように，結び目や絡み目の量子不変量と位相的弦理論の関係における一つの鍵はチャーン・サイモンズ理論の相関関数の母関数を考えることです．この母関数は，より一般には位相的場の理論あるいは位相的弦理論の分配関数ととらえることができます．超対称理論における BPS 状態は双対性によって，しばしばソリトンやモノポールといった運動方程式の古典解と対応することが知られています．BPS 状態の数え上げによって位相不変量が定義できることの背景には，このような超対称理論における量子論と古典論の双対性があるように思われます．数学的に双対性を実現する典型的な方法の一つはフーリエ変換ですが，位相的弦理論の分配関数の計算はフーリエ変換の計算と類似したものとなっています．

2. 量子不変量とチャーン・サイモンズ理論

チャーン・サイモンズ理論は

$$S(A)=\frac{k}{4\pi}\int_M \mathrm{Tr}\left(A\wedge dA+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right)$$

を作用とする位相的ゲージ理論です．ここで A は 3 次元多様体 M 上のゲージ場（接続 1 形式）で，ゲージ群 G のリー代数 $\mathfrak{g}$ に値を取ります．また Tr で $\mathfrak{g}$ のキリング形式（不変双 1 次形式）を表します．記号 Tr を使うのは物理の習慣ですが，これは $\mathfrak{g}$ の基底を行列を用いて表現したときにキリング形式が行列のトレースに一致することに由来しています．作用の全体にかかるパラメータ k は物理的には結合定数と呼ばれ，相互作用の大きさを表します．規格化因子 $1/4\pi$ は k が整数のとき，チャーン・サイモンズ作用が大域的なゲージ変換のもとで 2π の整数倍を除いて不変となるようにとったものです．パラメータ k は表現論の立場からレベルとも呼ばれます．チャーン・サイモンズ理論が位相的ゲージ理論と呼ばれる理由は，作用を書き下す際に 3 次元多様体 M の計量を用いる必要がないからです．ゲージ理論の通常の作用の運動項はポテンシャル A から得られるゲージ不変な曲率テンソル*1) F の 2 次式ですが，テンソルの添え字の縮約をとる際に計量テンソルが必要となります．これに対してチャーン・サイモンズ作用の密度は M 上の 3 形式なので体積要素に比例し，M 上で積分して作用の定義とすることが可能です．ウィッテンは，この性質を根拠にゲージ場 A に関する径路積分を用いて定義される分配関数

$$Z(M):=\int[\mathcal{D}A]\,e^{-S(A)}$$

が 3 次元多様体 M の不変量を定めると主張しました．なお，数学的に不変量を定義するためには径路積分の意味を適切に定義する必要がありますが，これはその後，実行され $Z(M)$ は 3 次元多様体 M の WRT 不変量と呼ばれています[2]．ウィッテンが次に考えたのはチャーン・サイモンズ理論における自然な物理量（観測可能量）です．チャーン・サイモンズ理論が位相的理論でしたから考える物理量も位相的なものであることを要請します．この要請をみたすのがゲージ理論で以前から知られていたウィルソンのループ作用素です．これは以下のように定義されます．まず多様体 M 内の閉曲線（結び目）$\mathcal{K}$ に沿った接続のホロノミー

$$U:=\mathrm{Hol}_{\mathcal{K}}(A)=\left(P\exp\oint_{\mathcal{K}}A\right)$$

を考えます．U はゲージ群 G の要素（ゲージ変換）を定めます．ここで $\mathcal{K}$ にはリー代数 $\mathfrak{g}$ のウェイト μ とレベル k により定まる量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の最高ウェイト表現が与えられているとします．これを結び目の色づけ（coloring）といいます．このときウィルソンのループ作用素を

$$W_R^{\mathcal{K}}(A):=\mathrm{Tr}_R\,U$$

と定義します．ここで Tr_R は，ウェイト μ から定まる群 G の最高ウェイト表現 R の表現空間上のトレースを表します．チャーン・サイモンズ作用を定義したときの Tr とは意味が異なるので注意してください．なお $G=SU(N)$ の場合，その最高ウェイト表現はヤング図形を使ってラベルすることができるので，$\mathrm{Tr}_R\,U$ の計算を対称群の表現論と結びつけることによって実行することが可能になります．以下，ヤング図形□に対応する $SU(N)$ の N 次元基本表現のトレースを単に Tr と書くことにすると，対称群の表現論におけるフロベニウスの関係式[3]を用いることにより，$\mathrm{Tr}_R\,U$ を $p_k(U):=\mathrm{Tr}\,U^k\ (k=1,2,\cdots)$ の多項式で書き表すことができます．例えば

$$\mathrm{Tr}_{\square\square\square}U=\frac{1}{3}p_3(U)+\frac{1}{2}p_2(U)p_1(U)+\frac{1}{6}p_1(U)^3$$

$$\mathrm{Tr}_{\substack{\square\square\\ \square\ \ }}U=-\frac{1}{3}p_3(U)+\frac{1}{3}p_1(U)^3$$

$$\mathrm{Tr}_{\substack{\square\\ \square\\ \square}}U=\frac{1}{3}p_3(U)-\frac{1}{2}p_2(U)p_1(U)+\frac{1}{6}p_1(U)^3$$

といった具合です．

さていくつかの結び目 $\mathcal{K}_i$ からなる絡み目 $\mathcal{L}$ を考え

*1) 電場や磁場の一般化．

ます．また各成分 $\mathcal{K}_i$ には色づけ R_i が与えられているとします．このときウィッテンの主張はループ作用素の相関関数

$$\left\langle \prod_{i=1}^{n} W_{R_i}^{\mathcal{K}_i} \right\rangle := \frac{1}{Z(M)} \int [\mathcal{D}A] e^{-S(A)} \prod_{i=1}^{n} W_{R_i}^{\mathcal{K}_i}(A)$$

が絡み目 $\mathcal{L}$ の量子不変量にほかならないというものです．この立場から見るとゲージ群 G と結び目の色づけ R_i を取り替えることにより膨大な種類の量子不変量が定義できることになります．実際 $G = SU(2)$ として R を $SU(2)$ の 2 次元基本表現とするとジョーンズ多項式が，$G = SU(N)$ として R を N 次元基本表現とすると HOMFLY 多項式が得られます．また $G = SU(2)$ で一般のスピン $j/2$ をもつ表現を考えた不変量が阿久津・和達多項式，$G = SO(N)$ を考えるとカウフマン多項式といった具合です．このようにチャーン・サイモンズ理論を考え，量子不変量を位相的ゲージ理論の相関関数として書くことにより，結び目に与える表現を固定することなく，それらをまとめて考えることが自然なものとなりました．これは次に導入する母関数を考える上からも重要なステップでした．

3. 数え上げと母関数

一般に数列 $\{a_n\}$ に対してべき級数 $g(t) = \sum_n a_n t^n$ を数列 $\{a_n\}$ の母関数あるいは生成関数といいます．例えば n を固定するとき相異なる n 個から k 個取り出す組み合わせの数（2 項係数）${}_n\mathrm{C}_k$ の母関数は

$$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k t^k = (1+t)^n \tag{1}$$

となります．この例では数列は有限でしたが，一般に母関数が興味ある性質をもつのは $\{a_n\}$ が無限数列の場合です．例えば漸化式

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{2}$$

と初期条件 $a_0 = a_1 = 1$ で定義されるフィボナッチ数列の母関数 $g(z) = \sum_n a_n z^n$ を考えると，漸化式と初期条件から $(1 - z - z^2) g(z) = z$ が得られます．したがって，部分分数分解により

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \alpha_+ z} - \frac{1}{1 - \alpha_- z} \right) \tag{3}$$

と書けます．ここで $\alpha_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ であり，とくに α_+ は古くから黄金比として知られている数です．母関数を考えることによりフィボナッチ数列と黄金比に思わぬ関係がつきました．さらに母関数 (3) から

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha_+^n - \alpha_-^n) \tag{4}$$

が得られるので $n \to \infty$ のとき $\alpha_-^n \to 0$ に注意すると，比 a_{n+1}/a_n が限りなく黄金比 α_+ に近づくことが分かります．このように母関数からフィボナッチ数列が漸近的にどのような振る舞いをするか見ることができます．

弦理論や共形場理論において典型的に現れる母関数として分割数の母関数があります．n 個のものを空でないいくつかの組に分ける分け方の総数を n の分割数といい，これを $p(n)$ と書きます．$p(n)$ は n をいくつかの自然数の和で書き表すときの表し方の総数です．例えば

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

と書けるので $p(4) = 5$ となります．オイラーは分割数の母関数が

$$Z(q) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k} \tag{5}$$

と書けることに気がつきました．ここでべき級数および無限積は $|q| < 1$ で絶対収束していますが，これを複素平面全体に解析接続して考えると母関数は以下の注目すべき性質をもっています．

$$Z\left(e^{2\pi i \tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{\frac{i\pi}{12}(\tau + \frac{1}{\tau})} Z\left(e^{-\frac{2\pi i}{\tau}}\right) \tag{6}$$

これから分割数 $p(n)$ の $n \to \infty$ における漸近的振る舞いを調べることができます．なお関係式 (6) はデデキントの η 関数

$$\eta(q) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \tag{7}$$

がウェイト 1/2 の保形形式であることを意味しています．なお弦理論において分割数の母関数は 2 次元自由ボソン場の分配関数の計算に現れますが，共形アノマリーの効果を考慮した分配関数は保形性をもつ η 関数の逆数 $1/\eta(q)$ となります．最後に無限積表示から分割数の母関数を

$$Z(q) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1 - q^n} \right) \tag{8}$$

と書くこともできることを注意しておきましょう．

4. 自明な結び目と量子次元

結び目理論で量子不変量を考える場合は，通常，量子群とその表現を固定して様々な結び目や絡み目に対して不変量を計算します．これに対して量子不変量の母関数を考えるという立場では，むしろ結び目や絡み

目を固定して，それに与える色づけとして許される表現すべてを動かします，簡単のため，固定する結び目として最も基本的な 3 次元球面内の自明な結び目 $\mathcal{U}$ を考えましょう．一般に量子不変量は $q^{\frac{1}{2}}$ と $\lambda^{\frac{1}{2}}$ に関する 2 変数有理関数ですが，色づけとして $SU(N)$ の最高ウェイト表現 R をとるとき自明な結び目の量子不変量 $W_R(q,\lambda)(\mathcal{U})$ は R の量子次元と呼ばれる関数に一致することが知られています，

$$W_R(q,\lambda)(\mathcal{U}) = \dim_q R. \tag{9}$$

ここで

$$q := \exp\left(\frac{2\pi i}{k+N}\right) \tag{10}$$

であり，さらに $\lambda := q^N$ と定義します．パラメータ q は量子群の変形パラメータに対応します．

量子次元 $\dim_q R$ は R の古典的な表現空間の次元 $\dim R$ から簡単な規則で計算することができます．先に触れたように $SU(N)$ の最高ウェイト表現 R にはヤング図 Y_R が対応しますが，まず Y_R から次元 $\dim R$ を求めるフック則について説明しましょう．まず与えられたヤング図 Y_R の箱に次の 2 種類の規則で自然数を入れていきます．最初は対角線上にある箱に N を入れ，対角線から斜め上に i だけずれた位置にある箱には $N+i$，斜め下に i だけずれた位置にある箱には $N-i$ を入れます（図 1 の左側を参照）．これらの数をすべて掛け合わせたものを $\mathcal{N}(Y_R)$ とします．次に箱の右と下にある箱の総数に 1（自分自身）を加えた数（フック長）を各々の箱に入れていきます（図 1 の右側を参照）．同様に箱に入った数をすべて掛け合わせたものを $\mathcal{D}(Y_R)$ とします．このとき，対応する表現空間の次元が

$$\dim R = \frac{\mathcal{N}(Y_R)}{\mathcal{D}(Y_R)} \tag{11}$$

で与えられるというのがフック則です．これが自然数を与える（分子は分母で必ず割りきれるという）ことを示すことは簡単な演習問題です．例えば，図 1 の例では

$$\dim R = \frac{N^2(N^2-1)(N+2)}{24} \tag{12}$$

と計算できます．なお，この規則は縦の長さが N を

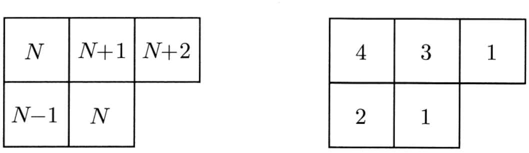


図 1　ヤング図とフック則．

超えたヤング図に対応する $SU(N)$ の表現はないことも意味しています．フック則の計算においてヤング図の箱に入った自然数 n を以下で定義される q-整数

$$[n]_q := \frac{q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \tag{13}$$

で置き換えたものが量子次元 $\dim_q R$ を与えます．q-整数 $[n]_q$ は正の整数を係数とする q の多項式となることに注意してください．

5. 量子不変量の母関数

自然数 n の分割数 $p(n)$ の母関数を考えた場合には n が自然数全体を動くときの分割数全体 $p(n)$ を集まりとしてとらえました．量子不変量 $W_{R_1,\cdots,R_L}(\mathcal{L})$ について母関数を考える場合には（絡み目 $\mathcal{L}$ を固定して）許される表現 $R_1,\cdots,R_L$ 全体を動かして量子不変量 $W_{R_1,\cdots,R_L}(\mathcal{L})$ 全体を集まりとしてとらえます．以下では簡単のため，結び目の場合に話を限ることにします．具体的に母関数を定義するために大栗とヴァッファによって最初に導入された以下のような作用素を考えます[4)]．

$$Z(U,V) := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Tr}U^n \mathrm{Tr}V^n\right)$$

ここで U は先にループ作用素を定義する際に用いたホロノミーで，以下ではゲージ群として $SU(N)$ を考えることにします，また V は $SU(M)$ のリー代数に値をもつ行列で場の理論における外場（背景場）に相当するものです．ここで量子場 U に対する N と背景場 V に対する M を独立にとっていることに注意してください．場の量子論の教科書には，量子場 $\phi(x)$ を力学変数とする理論において背景場 $J(x)$ を導入すると，分配関数

$$Z[J(x)] := \left\langle \exp\left(\int dx \phi(x) J(x)\right)\right\rangle$$

が相関関数 $\langle \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle$ の母関数

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\cdots\int dx_1 \cdots dx_n \times J(x_1)\cdots J(x_n)\langle \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle$$

を与えることが載っています．位相的場の量子論では相関関数が位相不変量を与えると考えているので，同様の考え方で定義された分配関数は，まさしく不変量の母関数であり，

チャーン・サイモンズ理論の位相的相関関数
＝ 結び目の量子不変量の母関数

は作用素 $Z(U,V)$ の期待値 $\langle Z(U,V)\rangle$ で定義できると考えられます*2)．大栗とヴァッファは期待値が

$$\langle Z(U,V)\rangle = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{R}\frac{1}{n}f_R(q^n,\lambda^n)\mathrm{Tr}_R V^n\right)$$

の形に書けることを示しました．ここで R は $SU(M)$ の表現全体にわたる和です．さらに彼らは，結び目理論と弦理論の関係に基づいて，整数 $N_{R,k,s}$ が存在して関数 $f_R(q,\lambda)$ を

$$f_R(q,\lambda) = \sum_{k,s}\frac{N_{R,k,s}}{q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}}\lambda^k q^s \tag{14}$$

の形に書くことができると主張しました．ここで和は 2 つの半整数 (k,s) の組についてとります．

期待値 $\langle Z(U,V)\rangle$ が量子不変量の母関数であるということは，関数 $f_R(q,\lambda)$ を量子不変量 $W_R(q,\lambda)$ で表すことができることを意味します．具体的にヤング図形の箱の数が 3 つ以下の場合に書き下してみると，以下のようになります5)．

$$\begin{aligned}
f_{\square} &= W_{\square}(q,\lambda),\\
f_{\square\square} &= W_{\square\square}(q,\lambda)-\frac{1}{2}\left(W_{\square}(q,\lambda)^2+W_{\square}(q^2,\lambda^2)\right),\\
f_{\substack{\square\\\square}} &= W_{\substack{\square\\\square}}(q,\lambda)-\frac{1}{2}\left(W_{\square}(q,\lambda)^2-W_{\square}(q^2,\lambda^2)\right),\\
f_{\square\square\square} &= W_{\square\square\square}(q,\lambda)-W_{\square}(q,\lambda)W_{\square\square}(q,\lambda)\\
&\quad+\frac{1}{3}\left(W_{\square}(q,\lambda)^3-W_{\square}(q^3,\lambda^3)\right),\\
f_{\substack{\square\square\\\square}} &= W_{\substack{\square\square\\\square}}(q,\lambda)\\
&\quad-W_{\square}(q,\lambda)\left(W_{\square\square}(q,\lambda)+W_{\substack{\square\\\square}}(q,\lambda)\right)\\
&\quad+\frac{2}{3}W_{\square}(q,\lambda)^3+\frac{1}{3}W_{\square}(q^3,\lambda^3),\\
f_{\substack{\square\\\square\\\square}} &= W_{\substack{\square\\\square\\\square}}(q,\lambda)-W_{\square}(q,\lambda)W_{\substack{\square\\\square}}(q,\lambda)\\
&\quad+\frac{1}{3}\left(W_{\square}(q,\lambda)^3-W_{\square}(q^3,\lambda^3)\right).
\end{aligned}$$

ここで前節で計算した量子次元 $\dim_q R$ から自明な結び目に対して $f_R(q,\lambda)$ を計算してみると驚くべきことが起きていることが分かります．この場合 $R=\square$ を除く任意の表現 R に対して $f_R=0$ となってしまうのです．この事実は箱の数が 3 以下の表現について，前節で説明したフック則による量子次元の公式と上の関係式を用いて確かめることができるので，是非，自分で計算してみることをお勧めします．以上から自明な結び目に対してゼロにならない整数 $N_{R,k,s}$ は

$$N_{\square,\pm\frac{1}{2},0} = \pm 1 \tag{15}$$

に限られることがいえます．この事実は自明な結び目が本当に「自明」であることを示しているといってもよいでしょう．

*2) ループ作用素の説明の際に注意したように $\mathrm{Tr}_R U$ が $\mathrm{Tr}\, U^k$ の多項式で書けることを使うと，より直接的に母関数であることを見ることができます．

6. 位相的弦理論と BPS 状態の数え上げ

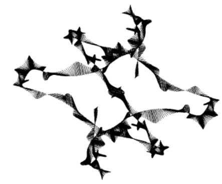
前節で説明した大栗・ヴァッファの予想の背後にあるのは 3 次元多様体 M 上のチャーン・サイモンズ理論が M の余接束 T^*M 上の位相的開弦理論と見なせるという事実です．余接束 T^*M は常に 6 次元シンプレクティック多様体となるので，この上で（A 模型と呼ばれる）位相的弦理論を考えることができます．ここで T^*M のラグランジアン部分多様体となっている M にブレインを巻き付けるとき，ブレイン上に誘導されるゲージ理論がチャーン・サイモンズ理論です．自明な結び目に対する結果から $f_R(q,\lambda)$ がより基本的不変量であることが期待されますが，位相的弦理論の立場から f_R の展開係数 $N_{R,k,s}$ は，ある種のブレイン配位における位相的開弦の BPS 状態の数と見なすことができます．これは様々な結び目に対して，実際に $f_R(q,\lambda)$ を計算してみると常に $N_{R,k,s}$ が整数となっていることから強く信じられています．この整数 $N_{R,k,s}$ を大栗・ヴァッファの不変量と呼ぶこともあります．また母関数の数学的構造という観点から注目すべき点は式 (14) において $f_R(q,\lambda)$ の分母が常に $(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}})$ であり，これ以上の高次の極が出てこないことです．大栗・ヴァッファの不変量は位相的開弦理論の不変量ですが，一方，位相的閉弦に関連する不変量として，近年，ドナルドソン・トーマス不変量およびその一般化に関する研究が急速に進展しています．今後，結び目の量子不変量の研究とどのように結びついていくか興味がもたれるところです．

参考文献

1) E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **121** (1989), 351.
2) N. Reshetikhin and V.G. Turaev, *Invent. Math.*, **103** (1991) 547.
3) 岡田聡一,『古典群の表現論と組み合わせ論（上・下）』, 培風館, 2006.
4) H. Ooguri and C. Vafa, *Nucl. Phys.*, **B577** (2000), 419.
5) J.M.F. Labasitida and M. Mariño, *Commun. Math. Phys.*, **217** (2001), 423.

（かんの・ひろあき，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

統計物理の可解模型と結び目不変量



出口 哲生

1. はじめに

1.1 統計物理学の理想と目標

雨上がりの雲の中に虹の輪を見出すとき，私たちはしばしその美しさに魅せられる．統計物理学は，森羅万象ともいうべき様々な自然現象を，その最も根本的な原理から説明することを目標とする．21 世紀の現在，それは量子力学の基礎原理から出発して数学的論理を積み重ねて相転移など物質世界の目に見えるマクロな現象を解明することである．数学の立場から見れば，自然科学を数学の一部にする試みとも言える．そもそもこの目標の達成は容易ではない．しかし，今までに多くの研究業績が積み重ねられ，その中には数学的にも興味深いものが多い．

1.2 結び目不変量と統計物理の不思議な関係

結び目（knot）は 3 次元空間の中の閉曲線である．複数の閉曲線のことを**絡み目**（link）と呼ぶ．結び目と絡み目を合わせて，絡み目と呼ぶ．

本解説では統計物理学の厳密に解ける模型（**可解模型**とも呼ぶ）と**結び目不変量**の関係を説明する．本特集のテーマである結び目不変量とは，2 つの結び目の図（結び目ダイアグラム）が同じ結び目を表す場合，そのどちらにも同じ値を与える数学的量のことである．数学のトポロジーと統計物理がなぜ結びつくのであろうか．

80 年代初めに**ジョーンズ多項式**という重要な結び目不変量が発見された．この発見は革命的で，その後に多数の結び目不変量が見出された[1)]．ジョーンズ多項式をある代数（TLJ 代数）を用いて定義できる．興味深いことに，この代数はその約 10 年前に統計物理の中ですでに導入されていた．数学のトポロジーと統計物理は独立な分野であり，この一致は偶然とも言える．しかし，物理学と数学の幅広い関連性を考慮すると，むしろ必然的にも思われる．

実際，80 年代後半以降，統計物理の厳密に解ける模型に関連する数理物理の中から，結び目不変量，量子群や qKZ 方程式など，数多くの数学的対象が導かれた[1〜6)]．逆に量子群を応用して量子 XXZ 鎖の相関関数の多重積分表示など統計物理学において重要な成果が得られた[7)]．

結び目不変量の数学と統計物理の可解模型は異なる分野であるが，数学的構造には共通なものが多い．その関連性に着目することは，今後の研究を予想する上でも興味深いと思う．

2. 統計物理における厳密に解ける模型

2.1 物質の物理学の歴史と可解模型の意義

統計物理における厳密に解ける模型とは，自由エネルギーなどの物理量を解析的に計算できる相互作用系の模型である[8〜10)]．一言で言えば，後述する**ヤン・バクスター方程式**の解である．

物理学の歴史の中での可解模型の意義を簡単に説明する．1920 年代中頃に量子力学が確立され，

応用として結晶などの固体物理学が発展した．1電子に帰着できる現象に関しては，現在までにかなり研究が進んでいる．1960年代半ば頃から2次相転移など，一体問題に帰着できない多体問題の研究が本格的に行われた．多体系の振舞いをきちんと調べることは難しく，たいてい何か近似法を仮定しなければならない．

驚くべきことに統計物理の可解模型では，原子・分子のレベルで模型を定義し，サイズ無限大の極限をとると，相転移など系の巨視的な振舞いを解析的な方法で具体的に導くことができる[8~10]．厳密解を用いて物理現象の実在性が確認され，他の近似的方法による研究が検証される．実際，2次相転移，近藤効果（磁性不純物の効果）や量子相転移など，様々な物理現象の特徴が，可解模型によって明らかにされた．

2.2 統計力学の基本原理

統計力学では，系の物理量 A の期待値 $\langle A\rangle$ を求めることにより系の特徴を明らかにする．状態 j における A の値を A_j，状態 j の出現確率 P_j を用いて，$\langle A\rangle$ は次のように表される．

$$\langle A\rangle = \sum_j A_j P_j.$$

温度 T の外界と接して熱平衡状態にある物理系を考える．系の状態 j の実現確率 P_j は，状態 j のときの系のエネルギー E_j を用いて[11)]

$$P_j = \frac{1}{Z}\exp(-E_j/k_BT) \qquad (1)$$

と表される．これを正準分布あるいはカノニカル分布と言う．ここで $\exp x$ は e^x を表す．分母

$$Z = \sum_{j:states} \exp(-E_j/k_BT) \qquad (2)$$

を**分配関数**と呼ぶ．ここで和は系のすべての可能な状態 j についてとる．系の自由エネルギー F は $F=-k_BT\log Z$ で与えられ，その微分から原理的にすべての物理量の期待値が導かれる．

2.3 6頂点模型

可解模型の例として，2次元正方格子上に定義された6頂点模型（6バーテックス模型，6-vertex model）を解説する[8,10)]．この模型は，氷など誘電体の熱平衡状態を記述する．

2次元正方格子の各頂点に原子が位置し，各辺

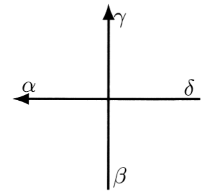


図1 頂点の周りの分極の配置：$\alpha,\beta,\gamma,\delta$；水平左向き，垂直上向きが正方向．ボルツマン重率 $w(\alpha,\beta|\gamma,\delta)$ と R 行列 $R^{\alpha,\gamma}_{\delta,\beta}$ に対応．

の上にはプラスあるいはマイナスの矢印が配置され，分極の向きを表すものとする．分極の値は ±1 とする．頂点の周りの4個の分極が各々 ±1 をとると，全部で16通りの配置がある．

図1のように頂点の周りの分極の値を $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ という変数で表そう．このとき，各々の頂点の周りの電荷分布は中性でなければならない．電荷分布の中性条件は次式で与えられる．

$$\alpha+\gamma=\beta+\delta. \qquad (3)$$

氷の場合，条件(3)は**アイス・ルール**とも呼ばれる．$\alpha+\gamma\neq\beta+\delta$ のとき，頂点の周りに正あるいは負の電荷が出現してエネルギー的に不利となり，平衡状態では実現しない．そこで，全部で $2^4=16$ 通りの配置の中で(3)を満たす6通りだけが出現する（図2）．このため，6-vertex model と名付けられた．以後，分極の値 $+1$ と -1 を添え字では各々1と2で表す．

頂点の周りの分極の配置が図1の $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ のとき，対応するエネルギーを $\epsilon(\alpha,\beta|\gamma,\delta)$ と表し，ボルツマン重率（Boltzmann weight）

$$w(\alpha,\beta|\gamma,\delta)=\exp(-\epsilon(\alpha,\beta|\gamma,\delta)/k_BT) \qquad (4)$$

を定義する．統計力学の基本原理(1)からこれは

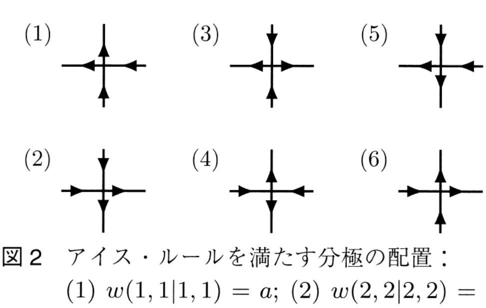


図2 アイス・ルールを満たす分極の配置：(1) $w(1,1|1,1)=a$; (2) $w(2,2|2,2)=a$; (3) $w(1,1|2,2)=c$; (4) $w(2,2|1,1)=c$; (5) $w(1,2|2,1)=b$; (6) $w(2,1|1,2)=b$.

図 1 の配置が実現する確率に比例する．系の状態 j に対するエネルギー E_j は，頂点 k の周りの配置のエネルギー $\epsilon(a_k, b_k|c_k, d_k)$ の和で

$$E_j = \sum_{k:vertices} \epsilon(a_k, b_k|c_k, d_k)$$

と与えられる．分配関数 Z は各頂点のボルツマン重率の積を用いて次のように計算される．

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{j:states} \exp\left(-\sum_{k:vertices} \epsilon(a_k, b_k|c_k, d_k)\right) \\ &= \sum_{j:states} \prod_{k:vertices} w(a_k, b_k|c_k, d_k). \quad (5) \end{aligned}$$

正方格子の一辺の格子点数を N とし，**転送行列** τ を定義しよう．図 3 のような N 個の頂点の列を考える．$N \times N$ の正方格子は長さ N の列が N 個かけ合わされたものとみなせる．図 3 の変数 $a_1, \dots, a_N$ と $b_1, \dots, b_N$ の値を与えた場合の列の重率（確率）を求め，転送行列 τ の $(\{a_j\}, \{b_j\})$ 成分の行列要素として定義する．

$$\tau^{a_1, \dots, a_N}_{b_1, \dots, b_N} = \sum_{c_1, \dots, c_N} \prod_{k=1}^{N} w(c_k, b_k|a_k, c_{k+1}).$$

ここで格子の列（行）の上の $N+1$ 番目の分極の向きは，1 番目の分極の向きと同じと仮定する（図 3 では $c_{N+1} = c_1$）．これを**周期的境界条件**と呼ぶ．このとき分配関数は転送行列の積 τ^N のトレース（対角要素の和）で与えられる．

$$Z = \mathrm{Tr}_{12\cdots N}\left(\tau^N\right) = \sum_{a_1, \dots, a_N} \left(\tau^N\right)^{a_1, \dots, a_N}_{a_1, \dots, a_N}.$$

転送行列 τ の固有値を Λ_j と表すと，分配関数は転送行列の固有値のべき和で表される．

$$Z = \Lambda_1^N + \Lambda_2^N + \cdots + \Lambda_{2^N}^N. \quad (6)$$

よって格子点当たりの自由エネルギー f_N は

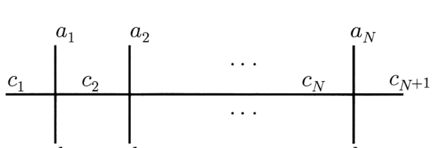


図 3　転送行列の行列要素 $\tau^{a_1, \dots, a_N}_{b_1, \dots, b_N}$．周期的境界条件 $c_{N+1} = c_1$ の下で $c_1, \dots, c_N$ のすべての場合（2^N 個）について和をとる．

$$f_N = -k_B T (\log Z) / N^2 \quad (7)$$

と導かれる．特に無限系の自由エネルギーは転送行列 τ の最大固有値 Λ_1 を用いて表される．

$$f_\infty = -k_B T \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log(\Lambda_1). \quad (8)$$

可解模型では，無限系の自由エネルギー (8) の解析的表式を導くことができる[8,10]．

3. ヤン・バクスター方程式と *R* 行列

3.1 *R* 行列

6 頂点模型の ***R* 行列**を導入する[12]．2 行 2 列の行列で a 行 b 列成分のみ 1 で他成分はすべてゼロ，という行列を $e^{a,b}$ と表す．

$$e^{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

行列 $e^{a,b}$ の成分 (j, k) の行列要素は，クロネッカーのデルタ記号を用いて次式で表される．

$$\left(e^{a,b}\right)^j_k = \delta(a, j)\,\delta(b, k) \quad (j, k = 1, 2).$$

2 行 2 列の行列は，複素数 $\mathbf{C}$ を係数とする 2 次元ベクトル空間 V から V への線形写像に対応する．テンソル積空間 $V_1 \otimes V_2$ に作用する線形写像を考える．例えば，$e^{1,2}$ と $e^{2,1}$ のテンソル積は次の 4 行 4 列の行列に対応する．

$$e_1^{1,2} \otimes e_2^{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

R 行列 $R_{1,2}$ を，次の 4 行 4 列の行列に対応する $V_1 \otimes V_2$ 上の線形写像として定義する．

$$R_{1,2} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2} R^{\alpha, \gamma}_{\delta, \beta}\, e_1^{\alpha, \delta} \otimes e_2^{\gamma, \beta}. \quad (11)$$

ここで $R^{\alpha, \gamma}_{\delta, \beta}$ の対応する配置は図 1 を参照[13]．

図 3 の中の N 本の縦線に対してテンソル積空間 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ を考え，これを量子空間と呼ぶ．図 3 の横線にベクトル空間 V_0 を対応させ，これを補助空間と呼ぶ．補助空間と量子空間のテンソル積 $V_0 \otimes (V_1 \otimes \cdots \otimes V_N)$ を考える．R 行列 $R_{1,2}$ (11) を拡張して，テンソル積空間 $V_0 \otimes (V_1 \otimes \cdots \otimes V_N)$

からそれ自身への写像 $R_{j,k}$ $(j, k = 0, 1, \cdots, N)$ を次式で定義する．

$$R_{j,k} = \sum_{a,b=1}^{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} R_{b,\beta}^{a,\alpha} I_0 \otimes \cdots \otimes I_{j-1} \otimes e_j^{a,b} \otimes I_{j+1} \otimes \cdots \otimes I_{k-1} \otimes e_k^{\alpha,\beta} \otimes I_{k+1} \otimes \cdots \otimes I_N. \quad (12)$$

転送行列 τ は R 行列で次のように表される．

$$\tau = \mathrm{tr}_0 \left(R_{0,1} \cdots R_{0,N} \right). \quad (13)$$

記号 tr_0 は量子空間 V_0 に関するトレースを表す．

3.2 ヤン・バクスター方程式と可解性の根源

重率 a, b, c を変数で表示しよう．規格化は任意なので，恒等的に $a(u) = 1$ とおく．$b(u) = \sinh u / \sinh(u + \eta)$, $c(u) = \sinh \eta / \sinh(u + \eta)$ と定めると，任意の重率の組 a, b, c が変数 u で表される．u をスペクトルパラメターと呼ぶ．R 行列 (12) で $a = a(u)$，$b = b(u)$，$c = c(u)$，を代入したものを $R_{j,k}(u)$ と表す．このとき，

$$R_{1,2}(u) R_{1,3}(u + v) R_{2,3}(v) = R_{2,3}(v) R_{1,3}(u + v) R_{1,2}(u) \quad (14)$$

が成り立つ（図 4）．式 (14) をヤン・バクスター方程式と呼ぶ．バクスターは，(14) が成立すると任意の u と v に対して転送行列 $\tau(u)$ と $\tau(v)$ は交換することを示した[8]（解説[10]参照）．

$$\tau(u)\tau(v) = \tau(v)\tau(u).$$

この結果，すべての u の値に対して転送行列 $\tau(u)$ が同時対角化される[14]．転送行列を $\tau(u) = \sum_n C_n u^n$ と u に関してべき展開すると，演算子 C_n は互いに交換し，保存量を与える．N 無限大のとき無限個の保存量が導かれる．ヤン・バクスター方程式 (14) は可解性の根源である．

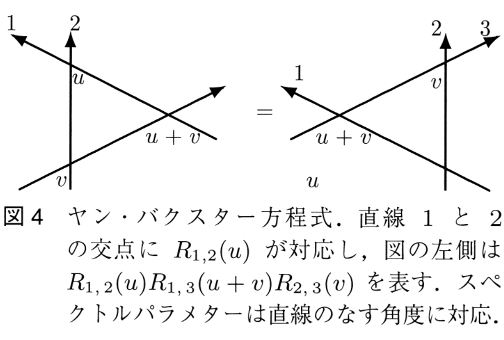


図 4　ヤン・バクスター方程式．直線 1 と 2 の交点に $R_{1,2}(u)$ が対応し，図の左側は $R_{1,2}(u) R_{1,3}(u + v) R_{2,3}(v)$ を表す．スペクトルパラメターは直線のなす角度に対応．

4. 6頂点模型からジョーンズ多項式を導出

4.1 Temperley–Lieb–Jones 代数

6 頂点模型やポッツ模型の研究の中で Temperley と Lieb は次のような代数を導いた[15].

$$E_{j+1}E_jE_{j+1} = E_{j+1}, \tag{15}$$

$$E_jE_{j+1}E_j = E_j, \quad 1 \le j \le N-2, \tag{16}$$

$$(E_j)^2 = Q^{1/2}\,E_j, \quad 1 \le j < N, \tag{17}$$

$$E_iE_j = E_jE_i, \quad |i-j| > 1. \tag{18}$$

関係式 (15)〜(18) を満たす E_j で生成される代数を，N 本のひもの **Temperley–Lieb 代数**（TLJ 代数，Temperley–Lieb–Jones 代数）と呼ぶ．

水平な棒に N 本のひもを結び，鉛直に垂れ下げる．演算子 E_j を，左から j 番目と $j+1$ 番目のひもを切って横向きにつなぐ生成 $\cup$ と消滅 $\cap$ 図形の対で表す（図 5）．(15) と (16) は生成・消滅図形を打ち消す操作（図 6）を表し，(17) は生成・消滅図形の積では中の $\cup$ と $\cap$ の対がループ○を形成して $Q^{1/2}$ を与えると解釈できる．

4.2 *R* 行列から *TLJ* 代数へ

R 行列を変形して TLJ 代数を導く[16].

$$\varphi(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

上で定義された $\varphi(\lambda)$ から $\Phi_j(\lambda)$ を導入する．

$$\Phi_j(\lambda) = I^{\otimes(j-1)} \otimes \varphi_j(\lambda) \otimes I^{\otimes(N-j)}.$$

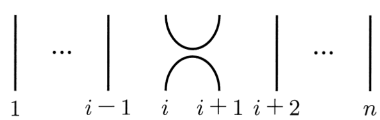


図 5　演算子 E_i：生成 $\cup$ 消滅 $\cap$ 図形の対．生成点は $\cup$ の最低点，消滅点は $\cap$ の最高点．

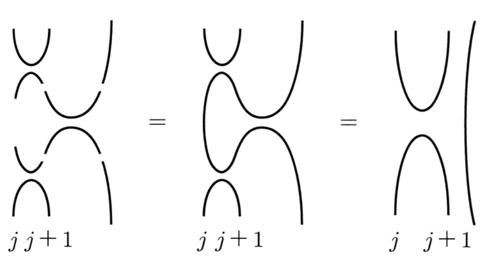


図 6　関係式 (15) の図的解釈：$E_jE_{j+1}E_j = E_j$.

そして新しい R 行列 R^+ を次式で定義する[17].

$$R^+_{j,k}(u) = \Phi_j(u)\,R_{j,k}(u)\,\Phi_j(u)^{-1}. \tag{20}$$

これを**ゲージ変換**と呼ぶ[18]．アイス・ルール (3) のため，$R^+_{j,k}(u)$ も可解性条件 (14) を満たす[16]．$\Pi_{j,k}$ を R 行列の $u=0$ の場合で定義する．

$$\Pi_{j,k} = R_{j,k}(u=0). \tag{21}$$

例えば $\Pi_{1,2}$ は次のように求められる．

$$\Pi_{1,2} = \sum_{\alpha,\beta=1,2} e_1^{\alpha,\beta} \otimes e_2^{\beta,\alpha} \otimes I^{\otimes(N-2)}.$$

基本ベクトル $\vec{e}_j$ $(j=1,2)$ を

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

と表すと，$\Pi_{1,2}$ は次の関係式を満たす．

$$\Pi_{1,2}\,\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1, \quad \Pi_{1,2}\,\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2.$$

よって $\Pi_{1,2}$ はテンソル積を並べ替える置換を表す．R 行列をもう一捻りし，$\check{R}_{j,k}(u) = \Pi_{j,k}\,R^+_{j,k}(u)$，次式で演算子 $X_j(u)$ を定義する．

$$X_j(u) = \check{R}_{j,j+1}(u) = \Pi_{j,j+1}\,R^+_{j,j+1}(u).$$

このときヤン・バクスター方程式 (14) は

$$X_j(u)X_{j+1}(u+v)X_j(v)$$

$$= X_{j+1}(v)X_j(u+v)X_{j+1}(u) \tag{23}$$

と表される．$X_j(u)$ は次のように分解される[19].

$$X_j(u) = I^{\otimes N} - b(u)U_j. \tag{24}$$

$q = e^{\eta}$ として，演算子 U_j は次で表され[20]，

$$U_j = I^{\otimes(j-1)} \otimes U \otimes I^{\otimes(N-j+1)}$$

$Q^{1/2} = q + q^{-1}$ となる TLJ 代数を満たす．

4.3 組みひもと組みひも群

水平な棒に N 本のひもを結び，隣どうしのひもを交差させて編まれたものを**組みひも**と呼ぶ．左から順番に数えて i 番目と $i+1$ 番目のひもを正符号で交差させる操作を b_i とし（図 7），b_1 から b_{N-1} とその逆元で生成される群を，組みひも群 B_N と呼ぶ．B_N は以下の関係式を満たす $b_1,\ldots,b_{N-1}$ で生成される無限群となる．

$$b_ib_{i+1}b_i = b_{i+1}b_ib_{i+1},\ 1 \le i < n, \tag{25}$$

$$b_ib_j = b_jb_i, \quad |i-j| > 1. \tag{26}$$

組ひも群の関係式 (25) はヤン・バクスター方程

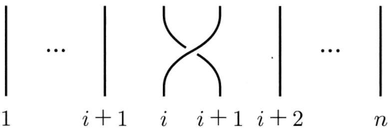


図7 組ひも群の生成子 b_i の図（交点は正符号）

式 (23) と似ている．そこで g_j を次で定める．

$$g_j = \lim_{u \to \infty} X_j(u) . \tag{27}$$

g_j とその逆 g_j^{-1} は以下のように求められる．

$$g_j = I^{\otimes n} - qU_j ,\ g_j^{-1} = I^{\otimes n} - q^{-1}U_j . \tag{28}$$

定義 (27) から g_j は関係式 (25) を満たし，よって g_j は組みひも群 B_N の表現行列を与える．

こうして 6 頂点模型から TLJ 代数や組ひも群の表現行列が導かれた[16]．6 頂点模型と TLJ 代数の関係は可解模型では重要である[21, 22]．特に高次スピン XXZ 鎖の相関関数の導出では，ゲージ変換 (20) と共に本質的である[23]．

4.4 ジョーンズ多項式と TLJ 代数

絡み目を平面に射影し，交点で曲線の上下を区別したものを，絡み目の射影図と言う．以下，曲線に向きが付いた有向絡み目を考える．射影図中の交点において上の線分を回して下の線分に重ねるとき，回転が反時計回りのとき正符号，時計回りのとき負符号を交点に対応させる．

絡み目 L が生成点 m 個の射影図 $\hat{L}$ に対応するとき，$\hat{L}$ は B_{2m} と $2m$ 本のひもの TLJ 代数の要素で表される．例えば図 8 は生成点 2 個と消滅点 2 個を持ち，$E_1E_3b_2^3E_1E_3$ に対応する．

射影演算子 P を次のように定義する．

$$P = U_1U_3 \cdots U_{2m-1}Q^{-m/2} .$$

射影図 $\hat{L}$ が B_{2m} と $2m$ 本のひもの TLJ 代数の要素で表されるとき，$\phi(\hat{L})$ を次で定める[24]．

$$P\hat{L}P = \phi(\hat{L})P .$$

射影図 $\hat{L}$ の交点の符号の和を $w(\hat{L})$ を用いて，ジョーンズ多項式 $V_L(t)$ は次式で与えられる．

$$V_L(t) = \phi(\hat{L})q^{w(\hat{L})}Q^{1/2} \tag{29}$$

ただし右辺で変数 q に $q = -t^{1/2}$ を代入する．例

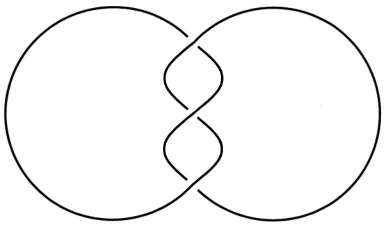


図 8　三葉結び目 (3_1) の射影図 $(w=3)$．(28) より $g_2^3 = I^{\otimes 4} + (-q^5+q^3-q)U_2$ を導き，代入して[25] $\phi(E_1E_3b_2^3E_1E_3) = (-q^5+q^3+q^{-1})/Q^{1/2}$ より，$V_{3_1}(t) = -t^4+t^3+t$.

えば図 8 の三葉結び目 3_1 のジョーンズ多項式は，$V_{3_1} = -t^4+t^3+t$ と求められる[25]．

こうして，6 頂点模型の R 行列から TLJ 代数を経由して，ジョーンズ多項式が導かれた．

5. 今後の展望

結び目不変量の数学と統計物理の可解模型の交流は，現在も興味深い結果を導いている[21~23]．

量子 XXZ 鎖の相関関数の多重積分表示は最初に量子群を用いて導かれたが，最近リヨン学派によって代数的ベーテ仮設法を用いて再導出され，さらに拡張された[22]．相関関数の漸近極限の厳密な導出に関する最近の研究など，素晴らしい業績が導かれた．その研究の動機の中に，Drinfeld ツイストの応用があった[21]．これは KZ 方程式のモノドロミーを求めるのに威力を発揮した方法で，「河野–Drinfeld の定理」の証明にも用いられた[4]．代数的ベーテ仮設法による相関関数の導出は，結び目不変量の数学を可解模型へ応用する例とも言えるのである．

また，結び目不変量を応用して，高分子のトポロジーと絡み合いの効果も研究されている[26]．

統計物理と結び目の数学との豊な交流は，幅広い研究領域の中で，今後も続くことであろう．

注と参考文献

1) 村杉邦男『結び目理論とその応用』日本評論社 (1993).
2) Y. Akutsu, T. Deguchi and M. Wadati, in *Braid Group, Knot Theory and Statistical Mechanics*, eds. C.N. Yang and M.L. Ge, (World Scientific Pub., Singapore, 1989) 151–200.
3) 神保道夫，『量子群とヤン・バクスター方程式』シュプリンガー・ジャパン (1990).
4) V. Chari and A. Pressley, *A guide to quantum groups*, (Cambridge Univ., Cambridge, 1994).
5) 河野俊丈『場の理論とトポロジー』，岩波講座現代数学の展開 22, (1998).
6) 和達三樹『結び目と統計力学』岩波書店 (2002).
7) M. Jimbo and T. Miwa, *Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models* (AMS, Providence, RI, 1995).
8) R.J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (Academic Press, 1982, London).
9) B.M. McCoy and T.T. Wu, *The Two-Dimensional Ising Model*, (Harvard Univ., Camridge, 1973).
10) 出口哲生，1 次元量子系の厳密解とベーテ仮説の数理物理，物性研究 **74-3** (2000-6) pp.255–319.
11) 和達三樹，十河清，出口哲生，『ゼロからの熱力学と統計力学』岩波書店．
12) 転送行列 τ の固有ベクトルを導く代数的ベーテ仮設法において，R 行列は重要な役割を果たす[10,21~23]．
13) $R^{1,1}_{1,1} = R^{2,2}_{2,2} = a$, $R^{1,2}_{1,2} = R^{2,1}_{2,1} = b$, $R^{1,2}_{2,1} = R^{2,1}_{1,2} = c$.
14) 2 つの対角化可能な行列が交換するとき，これらは同時対角化可能である．また，ベーテ仮設法による τ の固有ベクトル全体が完全系をなすと仮定している[10]．
15) H.N.V. Temperly and E.H. Lieb, *Proc. R. Soc. London Ser. A* **322** (1971) 251–280.
16) Y. Akutsu and M. Wadati, *J. Phys. Soc. Jpn.* **56** (1987) 3039–3051.
17) R 行列 $R^+_{j,k}(u)$ は，アファイン量子群 $U_q(\widehat{sl_2})$ の homogeneous grading に対応し，R 行列 $R_{j,k}(u)$ は principal grading に対応する[7,23]．
18) $c^{\pm}(u) = \exp(\pm u)\sinh\eta/\sinh(u+\eta)$ とすると，$R^+_{j,k}(u)$ の行列要素で $R_{j,k}(u)$ と異なるのは $R^{1,2}_{2,1} = c^-(u)$ と $R^{2,1}_{1,2} = c^+(u)$ のみ．
19) $c^{\pm}(u) = 1 - q^{\mp}b(u)$ を用いると (24) 式が導かれる．R. Baxter, *J. Stat. Phys.* **28** (1982) 1–41. ヤン・バクスター化とも言う．
20) 4 行 4 列行列 U のゼロでない行列要素は $U^{12}_{12} = q^{-1}, U^{12}_{21} = U^{21}_{12} = -1, U^{21}_{21} = q$ のみである．
21) J.M. Maillet et al., Drinfel'd twists and algebraic Bethe ansatz, ed. M. Semenov-Tian-Shansky, *Amer. Math. Soc. Transl.* **201** Ser. 2, (Providence, R.I.: AMS, 2000) pp.137–178.
22) N. Kitanine, J.M. Maillet and V. Terras, *Nucl. Phys. B* **567** [FS] (2000) 554–582.
23) T. Deguchi and C. Matsui, *Nucl. Phys. B* **814** [FS] (2009) 405–438.
24) 出口哲生，数理科学 No.**512**, 2/2006, pp.56–61.
25) (18) 等より $U_1U_3U_1U_3 = U_1^2U_3^2 = (Q^{1/2})^2U_1U_3$, (17) より $U_1U_3U_2U_3U_1 = U_1U_3U_1 = U_1^2U_3 = Q^{1/2}U_1U_3$, $U_1U_3g_2^3U_1U_3 = U_1U_3Q^{1/2}((q+q^{-1})+(-q^5+q^3-q)) = U_1U_3Q^{1/2}(-q^5+q^3+q^{-1})$.
26) 出口哲生，数理科学 No.**550**, 4/2009, pp.13–18.

（でぐち・てつお，お茶の水女子大学理学部）

表現論と結び目不変量

Khovanov 理論の表現論への影響



有 木 進

1. Hecke 代数

幾何学を研究する方々にとっては絡み目・結び目の幾何学的側面こそが面白いのではないかと思うが，(3 次元球面に埋め込まれた) 絡み目・結び目の研究では組合せ論的・圏論的な手法が大きな役割を果たしており，Temperley-Lieb 代数や量子群の表現論の応用としての側面がまず思い浮かぶ．Jones 多項式をタングル圏からのテンソル関手を用いて構成したり[14]，Jones の本来の定義のように Temperley-Lieb 代数の Markov トレースから構成する，という話は有名なので絡み目・結び目の研究者でなくても知っているというわけである．Temperley-Lieb 代数は A 型 Hecke 代数の商代数であり A 型 Hecke 代数にも Ocneanu トレースが定義されて HOMFLY-PT 多項式が得られるから，Hecke 代数の研究者にも絡み目・結び目の理論に詳しい者が多い．Hecke 代数の生成元と基本関係による定義を書いておこう．生成元は $T_1, \cdots, T_{n-1}$ であり，基本関係は

$$(T_i - q)(T_i + 1) = 0 \tag{1}$$

$$T_i T_j = T_j T_i \tag{2}$$

$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} \tag{3}$$

ただし，q は基礎環の可逆元で $j \neq i \pm 1$ である．表現論を考えるときは基礎環を代数閉体にとる．さらに関係式

$$\begin{aligned} T_i T_{i+1} T_i + T_i T_{i+1} + T_{i+1} T_i & \\ + T_i + T_{i+1} + 1 = 0 & \end{aligned} \tag{4}$$

を付け加えたのが Temperley-Lieb 代数である．

Hecke 代数が半単純でない，すなわち行列代数の直和にならないための必要十分条件は

$$\prod_{i=1}^{n} (q^{i-1} + \cdots + q + 1) = 0$$

である．あとで紹介するように半単純でないとき，A 型 Hecke 代数は 次数付き代数である．

この事実により，量子群の可積分加群の圏化の研究に新たな進歩があった．本稿ではこの最近の発展について紹介したいと思う．この進展は昨年起こり冬から春にかけて多くの論文が現れたのであるが，Khovanov 氏の圏化の研究が Hecke 代数の研究に波及したものなので，低次元トポロジーから表現論への贈り物といえるであろう．

ここでひとつ注意しておく．我々の興味は表現論であるから圏化は加群圏かその導来圏で作るのが基本である．代数多様体上の偏屈層や連接層のなす圏での圏化はあくまで手段であって最終目的ではない．具体的に定義された代数に対してその表現論が圏化を通じて解析できるところに圏化の意義を感じているのである．その典型的な成功例が次節で述べる Hecke 代数の Kazhdan-Lusztig 基底の BGG 圏による圏化である．

2. Kazhdan-Lusztig 基底の圏化

Hecke 代数の研究をする者にとって Hecke 代数の標準基底 (Kazhdan-Lusztig 基底) およびその表現論的解釈は心のふるさとである．すなわち，$\mathfrak{g}$ を半単純 Lie 代数，$\mathcal{O}$ を BGG 圏と呼ばれる $\mathfrak{g}$ 加群の圏，$\mathcal{O}_0$ を $\mathfrak{g}$ の自明な中心指標が定める $\mathcal{O}$ のブロック，とすると Grothendieck 群 $K(\mathcal{O}_0)$ は Verma 加群を Weyl 群 W の元に対応させることにより群代数 $\boldsymbol{Z}W$ と同一視され，このとき $\mathcal{O}_0$ の既約加群（またはその射影被覆）が Hecke 代数の標準基底を $q=1$ と特殊化して得られる $\boldsymbol{Z}W$ の元に対応する．この事実は Kazhdan-Lusztig により予想され，Beilinson-Bernstein, Brylinski-Kashiwara により証明された．今はやりの言葉でいえば群代数 $\boldsymbol{Z}W$ とその標準基底が Abel 圏 $\mathcal{O}_0$ で圏化されたわけである．

ここで注意すべきは標準基底を定義するには Weyl 群の群代数を見ているだけでは駄目なことで，$\boldsymbol{Z}[q,q^{-1}]$ 上で定義された Hecke 代数を考えるのが必然である．つまり Hecke 代数の方が本来の姿であるともいえる．

そこで，$q=1$ と特殊化する前の Hecke 代数自体の圏化を探そうと考えよう．すなわち，次数付き代数の次数加群のなす圏をとり，次数ずらし関手を Grothendieck 群での q 倍写像の圏化と考える．Soergel はこのような次数加群による圏化を与えた．$\mathcal{O}_0$ の既約加群の完全代表系の直和を S とし，米田代数 $\mathrm{Ext}^*(S,S)$ を考えると，$\mathcal{O}_0$ は $\mathrm{Ext}^*(S,S)$ と森田同値で，米田代数は次数付き代数だから $\mathcal{O}_0$ に次数ずらし関手が定義できるのである．

この圏化は Kazhdan-Lusztig 予想の証明に沿うもので[3] $\mathcal{O}_0$ が旗多様体上の Schubert 胞体分割に伴う偏屈層のなす Abel 圏と同値でともに Koszul な次数付けを与えることより，一意性から Soergel の次数付けは Frobenius 作用から定まるものと同じである．ちなみに，積は畳込み積を Grothendieck 群で見たものになっている．

Hecke 代数を自身の左正則加群と見た場合は，$\mathcal{O}_0$ の壁越え平行移動関手を考えてもよく，これを一般化して A 型 Hecke 代数の Specht 加群の圏化も得られる[20]．

ところで，Lusztig は Hecke 代数の標準基底と同じ発想で量子群（の半分）や量子群の可積分加群の標準基底を導入した．別の代数の加群圏を用いてこれらが圏化できないか，というのは自然な希望であろう．そして今まで説明してきた話からすれば既約加群（またはその射影被覆）が Grothendieck 群において標準基底に対応しているような圏化を探すべし，というのも自然であろう．つまり同じ発想で導入されたものが2つあって，1つは Hecke 代数の標準基底，もう1つは量子群の標準基底であり，前者は BGG 圏の研究にとても役に立ったので後者についても同様の成功を狙いましょう，というわけである．（別の発展としては中島啓氏のアフィン型量子群の有限次元表現の理論があり，実はこちらの方が表現論では有名である．）

このような意味での量子群の圏化は筆者の構成した例を嚆矢とするが，それとは別に BGG 圏を使った $sl(2)$ およびその量子群に対する仕事が現れ，Khovanov の研究の出発点となる[4,13]．

3. Khovanov の考えた種々の圏化

Mikhail Khovanov 氏（コロンビア大学）は低次元トポロジーの研究者であるが，過去の研究を見る限り，圏化自身にまずは興味があるように思える．Lusztig の標準基底を用いた位相的場の理論の構成を提案した[10] I. Frenkel は，前節で述べたように Khovanov と一緒に $sl(2)$ の量子群の可積分加群の圏化を与えた共著を書いており，そのため Khovanov は当初から標準基底や Kazhdan-Lusztig 理論に馴染みがあった．彼を有名にしたのは Jones 多項式の圏化である．$sl(2)$ の量子群の基本表現を V とすると，タングル T に対し量子群の加群準同型

$$f(T): V^{\otimes m} \longrightarrow V^{\otimes n}$$

が定義され，これをもとに Jones 多項式が定義でき

るのであった．ここで，m, n が偶数の場合に限って考えることとし，$V^{\otimes m}$ と $V^{\otimes n}$ も自明表現の等質成分だけを拾って $f(T)$ を考えよう．この流儀で定義されたJones多項式を圏化するために導入されたのがKhovanov代数である．Khovanovはタングルコボルディズムの2-圏からKhovanov代数の両側加群の鎖複体のホモトピー類のなす2-圏への符号の不定性を許した関手もどきを構成し，これが絡み目・結び目のKhovanovホモロジーを与えるのであるが[15]，表現論の立場で重要なのはむしろその後Khovanovがこの代数を使って量子群の可積分加群の圏化を試みた研究である．

しかし，実はKhovanov代数は射影入射加群に関して有限表示的な加群のなす $\mathcal{O}_0$ の充満部分圏に森田同値であり[22]，この圏化も本質的にはBGG圏に由来するものであることがわかった．つまりBGG圏以外を使った圏化を見つけるのは難しい，というわけである．もちろん低次元トポロジーの立場からすれば，Jones多項式のグラスマン多様体を用いた幾何的圏化を考えることができるようになった，ということであるから，このStroppelの結果自体はあとに続く重要なきっかけを与えた成果である[11]．

4. Khovanov-Lauda 代数

Khovanovはその後Laudaとともに組織的に加群圏による量子群の圏化を探し，Khovanov-Lauda代数の概念に到達した[17]．ν がルート格子に属する非負重みならば 次数付き代数 $R(\nu)$ が定義されて量子群の重み ν の重み空間 $(U_v^+)_\nu$ を圏化する．この代数を見つける鍵になったのは次の考え方である．右射影加群 P と左射影加群 Q がともに重み ν の標準基底に対応しているとして，また標準基底の間の内積が

$$([P],[Q]) = \mathrm{gdim}(P \otimes_{R(\nu)} Q)$$

と解釈できるとしよう．$V = \oplus_{d\in \boldsymbol{Z}} V_d$ に対し

$$\mathrm{gdim}(V) = \sum_{d\in\boldsymbol{Z}} (\dim V_d) v^d$$

である．簡単な場合に左辺の内積の計算を行って，右辺で解釈すると，$R(\nu)$ にはどのような生成元が必要でどのような関係式を満たさないといけないかが推定できる．例えば e_i をChevalley生成元として

$$(e_i, e_i) = (1-v^2)^{-1}$$

という式から次数2の元 t_i の存在と $R(\alpha_i) = \boldsymbol{C}[t_i]$ が要請される．また，$R(\mu)\otimes R(\nu) \subseteq R(\mu+\nu)$ を要請すれば，$\nu = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_r}$ として

$$\boldsymbol{C}[t_1, \cdots, t_r] \subseteq R(\nu)$$

である．Khovanov-Lauda代数は図式代数の一種で絡み目・結び目の研究者にとって馴染みやすいであろう．Varagnolo-Vasserotによるより幾何的な記述もある[24]．

さて，Khovanov-Lauda代数は量子群（の半分）を圏化したが残念ながら最初に述べたHecke代数の標準基底の圏化のような形にはなっていない．圏 $\mathcal{O}_0$ にはBGG相互律があって，標準基底は直既約射影加群と既約加群の中間に位置する加群（Verma加群）に対し既約加群の重複度を記述する．他方 $R(\nu)$ の場合は直既約射影加群は無限次元，既約加群は有限次元であるから，Verma型加群が存在して直既約射影加群が有限重複度のVerma型加群による部分加群列をもち，かつ各Verma型加群が有限重複度の既約加群による組成列をもつというのは不可能だからである．

Khovanov-Lauda代数の有限次元商代数をとることを考えよう．この代数がさらにセルラー代数ならばVerma型加群としてセル加群をとることができることを注意しておく．今までの話の流れからいくとセル加群に現れる既約加群の重複度を標準基底が記述すると期待されるわけである．

これを実行して巡回Hecke代数が現れることを発見したのがBrundan-Kleshchevである[7]．

5. 巡回 Hecke 代数による圏化

筆者は $\widetilde{A}$ 型Hecke代数の巡回商と呼ばれる有

限次元代数を研究しているが，この理論の発展のきっかけはこの代数を用いて $\widetilde{A}$ 型量子群の可積分最高重み加群を圏化する手法を発見したことであった．

さて，Brundan-Kleshchev は量子群が $\widetilde{A}$ 型の場合に Khovanov-Lauda 代数の巡回商を調べた．巡回商は可積分加群を圏化するために考えるもので，巡回商を考えるのはある意味必然である．上で述べたようにこの代数が筆者の研究している $G(m,1,n)$ 型 Hecke 代数に一致したのである．

この結果より，とくに A 型 Hecke 代数は次数付き代数である．生成元と基本関係を書いておこう．生成元は Khovanov-Lauda 生成元と呼ばれる．以下簡単のため $q \neq \pm 1$ とする．$q=-1$ のときは関係式を修正すればよい．

q が 1 の原始 e-乗根 ($e \geq 3$) ならば $I=\boldsymbol{Z}/e\boldsymbol{Z}$，$q$ が 1 のベキ乗根でないときは $I=\boldsymbol{Z}$ とおくと，生成元は

$$\sigma_1,\cdots,\sigma_{n-1},\ t_1,\cdots,t_n,\ e_{\boldsymbol{i}}\ \ (\boldsymbol{i}\in I^n)$$

である．基本関係を全部書くと長くなるので避けるが，$t_a, e_{\boldsymbol{i}}$ たちはすべて可換であり，$\sum e_{\boldsymbol{i}}=1$ はベキ等元分解であり，$\sigma_k t_a = t_a \sigma_k$ ($a \neq k, k+1$)

$$\sigma_k t_{k+1} - t_k \sigma_k = \sum_{i_k=i_{k+1}} e_{\boldsymbol{i}}$$

が成立し，$\sigma_1,\cdots,\sigma_{n-1}$ に Coxeter 関係式は成立しないが食い違う部分は $e_{\boldsymbol{i}}, t_a$ を用いて書かれる．また $\sigma_k e_{\boldsymbol{i}} = e_{\boldsymbol{j}} \sigma_k$ と書けて，$\boldsymbol{j}$ は $\boldsymbol{i}$ の i_k と i_{k+1} を交換したものである．このとき $A=(a_{ij})$ を $\widetilde{A}$ 型 Cartan 行列として

$$\deg(e_{\boldsymbol{i}})=\deg(t_a)=0,\ \deg(\sigma_k e_{\boldsymbol{i}})=-a_{i_k i_{k+1}}$$

と定めると Hecke 代数は次数付き代数になる．

Hecke 代数が半単純のときには次数が 0 以外の元は存在しないので意味がないが，半単純でなければ実際に異なる次数が現れる．ちなみに，このとき次数として負も現れることを注意しておく．

こうして，Khovanov-Lauda 代数の応用として A 型 Hecke 代数が次数付き代数になることがわかったわけであるが，今まで多くの一流の数学者が Hecke 代数を研究してきたのに誰も次数付き代数になると気づかなかったわけで，これはかなり意外な事実である．

さて A 型 Hecke 代数には LLT 予想という定理があって，上で述べた期待が可積分加群に対して実現されている．すなわち $\widetilde{A}$ 型量子群の基本表現の圏化が A 型 Hecke 代数により実現されていて，$v=1$ と特殊化するとセル加群に対する既約加群の重複度の行列が標準基底から計算できる．

ところが今度は Hecke 代数が次数付き代数とわかったわけだから，$v=1$ と特殊化せずに基本表現の標準基底を圏化できる．これも Brundan-Kleshchev によって示された[8]．この定理は A 型 Hecke 代数に限らず巡回 Hecke 代数に対して成立する．例えば B 型 Hecke 代数に対しても定理は正しい．かくして，$\widetilde{A}$ 型量子群の可積分加群に対しては表現論的には満足すべき圏化が得られたことになった．これが Khovanov 理論の表現論への贈り物である．

6. 今後の希望と展望

これまでの Kac-Moody Lie 代数またはその量子群の可積分加群の圏化の研究は個別の例を与えるのが中心であったが，Chuang-Rouquier の結果を一般化した理論も現れた[21]．一般化する前でも Broué 予想などに役に立った理論であるから今回の理論もうまい応用例が見つかればよいと思う．

量子群の可積分加群の (加群圏による) 圏化は今まではかなり例が限られており，それを抽象化した Chuang-Rouquier でもその枠を抜け出せていなかったのであるが，今回の Rouquier の一般論では Khovanov-Lauda 代数を使ってその困難が克服されている．(ちなみに，Rouquier はこの理論展開の文脈の中で彼自身独立に Khovanov-Lauda 代数の定義に到達していたと述べている.)

Khovanov-Lauda 代数またはその変種に対し，その有限次元商代数を考えて理論を展開すれば $\widetilde{A}$ 型から抜け出して多くの例を得られることになる

ので，この方向の研究はこれから徐々に進むのではないかと期待される．

他方，$\widetilde{A}$ 量子群に限っても可積分加群を含むFock 空間の圏化を考えるのが重要で筆者は変形Fock 空間の q-Schur 代数による圏化を与えた[1]．これを一般化すると例えば非等変数の場合の B 型Hecke 代数の標準基底の理解が進むので，これも追及すべき研究の方向性の１つである．

この方向は共形場理論由来の有理 Cherednik 代数を複素鏡映群 $G(m,1,n)$ に対して考えたときの圏 $\mathcal{O}$ の表現論が深く関係しており，実り豊かな数学を産むと期待されている．

7. 最後に

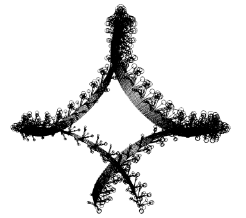
Khovanov 氏の研究のキーワードは圏化である．圏化にもいろいろなやり方があるが彼の圏化で使われるのは量子群や Hecke 代数，または図式代数であり，その結果，本稿で述べたように表現論の研究にも影響を与えている．低次元トポロジーに現れる不変量の研究にとってはこのような発展はあまり役に立たないかもしれないが，その点はご容赦願いたい．読者の皆様に低次元トポロジーの研究は Hecke 代数のモジュラー表現論にも影響を与えるのだなあ，数学はやっぱり有機的につながっているなあ，と思ってもらえれば本稿の目的は達したと思う．

参考文献

1) S. Ariki, Graded q-Schur algebras, arXiv:0903.3453.
2) M. Asaeda and M. Khovanov, Notes on Link Homology, arXiv:0804.1279.
3) A. Beilinson, V. Ginzburg and W. Soergel, Koszul duality patterns in representation theory, *J. Amer. Math. Soc.*, **9** (1996), 473–527.
4) J. Bernstein, I. Frenkel and M. Khovanov, A categorification of the Temperley-Lieb algebra and Schur quotients of $U(sl_2)$ via projective and Zuckerman functors, *Selecta Math. (N.S.)*, **5** (1999), 199–241.
5) J. Brundan, Symmetric functions, parabolic category $\mathcal{O}$, and the Springer fiber, *Duke Math. J.*, **143** (2008), 41–79.
6) J. Brundan, Centers of degenerate cyclotomic Hecke algebras and parabolic category $\mathcal{O}$, *Represent. Theory*, **12** (2008), 236–259.
7) J. Brundan and A. Kleshchev, Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras, arXiv:0808.2032.
8) J. Brundan and A. Kleshchev, Graded decomposition numbers for cyclotomic Hecke algebras, arXiv:0901.4450.
9) J. Brundan, A. Kleshchev and W.Q. Wang, Graded Specht modules, arXiv:0901.0218.
10) L. Crane and I. Frenkel, Four-dimensional topological quantum field theory, Hopf categories, and the canonical bases, *J. Math. Phys.*, **35(10)** (1994), 5136–5154.
11) S. Cautis and J. Kamnitzer, Knot homology via derived categories of coherent sheaves I, $sl(2)$-case, *Duke Math. J.*, **142** (2008), 511–588.
12) S. Cautis and J. Kamnitzer, Knot homology via derived categories of coherent sheaves II, sl_m-case, *Invent. Math.*, **174** (2008), 165–232.
13) I. Frenkel, M. Khovanov and C. Stroppel, A categorification of finite-dimensional irreducible representations of quantum $sl(2)$ and their tensor products, *Selecta Math. (N.S.)*, **12** (2006), 379–431.
14) C. Kassel, Quantum Groups, GTM **155**, Springer-Verlag (1995).
15) M. Khovanov, A functor valued invariant of tangles, *Algebr. Geom. Topol.*, **2** (2002), 665–741.
16) M. Khovanov, Link homology and categorification, International Congress of Mathematicians **II**, Eur Math. Soc., (2006), 989–999.
17) M. Khovanov and A. Lauda, A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I, arXiv:0803.4121.
18) M. Khovanov and A. Lauda, A diagrammatic approach to categorification of quantum groups II, arXiv:0804.2080.
19) M. Khovanov and A. Lauda, A diagrammatic approach to categorification of quantum groups III, arXiv:0807.3250.
20) M. Khovanov, V. Mazorchuk and C. Stroppel, A categorification of integral Specht modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **136** (2008), 1163–1169.
21) R. Rouquier, 2-Kac Moody algebras, arXiv:0812.5023.
22) C. Stroppel, Perverse sheaves on Grassmannians, Springer fibers and Khovanov homology, arXiv:math/0608234.
23) C. Stroppel and B. Webster, 2-block Springer fibers: convolution algebras and coherent sheaves, arXiv:0802.1943.
24) M. Varagnolo and E. Vasserot, Canonical bases and Khovanov-Lauda algebras, arXiv:0901.3992.

（ありき・すすむ，京都大学数理解析研究所）

数論と結び目不変量



森下　昌紀

筆者は今学期，物理学科の基礎数学，ベクトル解析を担当しています．ベクトル解析のふるさとの一つは古典電磁気学です．結び目理論における最初の不変量であるGaussのまつわり数も電磁気学の研究から生まれました．電場と磁場は，微分形式の言葉では，Poincaré双対の関係にあり，Maxwellの方程式は電磁双対性を与えます[2]．自然界の法則が幾何学の視点と言葉で美しく表現されます．

翻って，数論において電磁双対性に対応するものは何だろうか？ と思うと，やはりGaussによる平方剰余の相互法則が想起されます．2つの奇素数に対するGaussの相互法則は，エタール位相の言葉では，Poincaréの双対性として表現されます．古典電磁双対性がゲージ理論や弦理論の双対性へと発展したように[1]，Gaussの相互法則は類体論の双対定理へと発展しました[9]．数の世界の法則も幾何学の視点と言葉で美しく表現されます．

筆者は，このような幾何学と数論の関係，特に，結び目理論と数論の類似性の研究（数論的位相幾何学と呼びます）を続けてきました．この類似性については以前本誌でも解説いたしました[10,11]．文献11)の中で今後の問題とした双曲幾何学と肥田理論の類似性について，その後寺嶋郁二氏との共同研究により進展がありました．これは数論的位相幾何学の類似性を推し進める方向の研究ですが，一方，類似性自身を精密化する方向でも最近の関連する研究があります．本稿では，筆者の研究を中心に，関連する事柄や今後の問題，夢についても述べたいと思います．

1. 類似の辞書

位相幾何学におけるホモトピー論の類似としてエタールホモトピー論があり，数論的なスキームに対しても，その“形”を記述するエタール基本群などが定義されます．結び目理論と数論の類似性はこの（エタール）ホモトピー論の視点に基づいています．具体的な類似は本誌でも，以前解説いたしました[10,11]（拙書12）も参照）．ここでは，基本的な類似の辞書を与えるにとめます（表1〜5）．以下，スキームの基本群はエタール基本群を意味し，ホモロジー群は整数係数とします．

1.1 関連する類似性（計量化）

我々の類似はホモトピー的な視点によりますが，“円周” $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{F}_p)$ に“長さ” $\log p$ を与えると，対応する幾何的な対象は3次元Riemann多様体内の素な閉測地線となり，砂田利一氏らにより研究されてきた解析的数論と微分幾何学の類似[4]と合流します．この方向をさらに推し進めたのがC. Deninger氏の研究です[5]．

従来，整数環 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ は有限体 $\boldsymbol{F}_q$ 上の代数曲線

表1　円周と有限体．

円周 S^1	有限体 $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{F}_q)$
$\pi_1(S^1)=\langle l\rangle$ l: 1回りするループ	$\pi_1(\mathrm{Spec}(\boldsymbol{F}_q))=\langle\sigma\rangle$ σ: Frobenius自己同型

表2　管状近傍と𝔭-進整数環．

S^1 の管状近傍　V	𝔭-進整数環　$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$
$\pi_1(V)=\langle\beta\rangle$ β: ロンジチュード	$\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_\mathfrak{p}))=\langle\sigma\rangle$ σ: Frobenius自己同型
境界　∂V	𝔭-進体　$\mathrm{Spec}(k_\mathfrak{p})$
$\pi_1(\partial V)$	$\pi_1(\mathrm{Spec}(k_\mathfrak{p}))$
α: メリディアン	τ: モノドロミー $\in I_{k_\mathfrak{p}}$

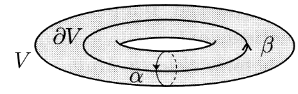


表3　3次元多様体と代数体の整数環．

3次元多様体　M	代数体 k の整数環　$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$
エンド　E_M	無限素点の集合　S_k^∞
$S^3=\boldsymbol{R}^3\cup\{\infty\}$	$\mathrm{Spec}(\boldsymbol{Z})\cup\{\infty\}$

表4　結び目と素イデアル．

結び目	素イデアル
$S^1 \hookrightarrow M$	$\mathrm{Spec}(\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$
$S^1 \hookrightarrow \boldsymbol{R}^3$	$\mathrm{Spec}(\boldsymbol{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\boldsymbol{Z})$
K の管状近傍 V_K	$\mathcal{O}_k$ の $\mathfrak{p}$-進完備化
結び目補空間 $X_K = M \setminus \mathrm{int}(V_K)$	素イデアル補空間 $X_{\{\mathfrak{p}\}} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k) \setminus \{\mathfrak{p}\}$
結び目群 $G_K = \pi_1(X_K)$	素イデアル群 $G_{\{\mathfrak{p}\}} = \pi_1(X_{\{\mathfrak{p}\}})$
ペリフェラル群 D_K $I_K = \langle$ メリディアン $\rangle$	$\mathfrak{p}$ 上の分解群 $D_{\{\mathfrak{p}\}}$ $\mathfrak{p}$ 上の惰性群 $I_{\{\mathfrak{p}\}}$
絡み目 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_r$	素イデアルの有限集合 $S = \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r\}$
絡み目群 $G_L = \pi_1(M \setminus L)$	分岐条件付き Galois 群 $G_S = \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k) \setminus S)$

表5　ホモロジー群とイデアル類群．

1 輪体群 $Z_1(M)$	イデアル群 $I(k)$
$C_2(M) \to Z_1(M)$ $D \mapsto \partial D$	$k^\times \to I(k)$ $a \mapsto (a)$
1 境界輪体群 $B_1(M)$	単項イデアル群 $P(k)$
1 次元ホモロジー群 $H_1(M) = Z_1(M)/B_1(M)$	イデアル類群 $H(k) = I(k)/P(k)$
2 次元ホモロジー群 $H_2(M)$	単数群 $\mathcal{O}_k^\times$

C の類似物と考えられてきました．$\overline{C} := C \otimes_{\boldsymbol{F}_q} \overline{\boldsymbol{F}}_q$（$\overline{\boldsymbol{F}}_q$ は代数閉包）とすると，$\overline{C}$ のコホモロジー次元は 2 なので，ファイブレーション $\overline{C} \to C \to \mathrm{Spec}(\boldsymbol{F}_q)$ より，C はホモトピー的には円周上の曲面束の類似と見なされます：

有限体上の代数曲線	円周上の曲面束

C には幾何的コホモロジー $H^*(\overline{C})$ とその上の Frobenius 作用が伴い，その特性多項式が C のゼータ関数を与えます．一方，整数環 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ には $\boldsymbol{F}_q$ に相当する定数体がないため，幾何的コホモロジーと Frobenius 作用の類似物がありません[*1)]．Deninger 氏は，代数体 k に対しても，ある 3 次元空間 M_k とその上の力学系（$\boldsymbol{R}$-作用）ϕ^t が伴い，さらに付加構造として M_k の 2 次元葉層構造 F を考えると，葉層コホモロジー $H_F^*(M_k)$ とその上の $\boldsymbol{R}$-作用が幾何的コホモロジーとその上の Frobenius 作用の類似の役目を果たすだろう，と予想しました．未だ (M_k, ϕ^t, F) の具体例はありませんが，傍証として，そのような力学系の Lefschetz 跡公式が解析数論の明示公式と類似することを示しています．M_k という 3 次元空間を考える点は，我々の類似と同じアイディアですが，Deninger 氏の対応は，$\mathcal{O}_k$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ と M_k 内の閉 $\boldsymbol{R}$-軌道（結び目）C とが，$\log \mathrm{N}\mathfrak{p} = C$ の長さ，の下で 1 対 1 に対応するという計量込みの予想です．また，最近，B. Morin 氏による Lichtenbaum の Weil-エタール位相を用いた数論的位相幾何学の精密化に関連する研究もあります．

2. 基本的な例

1 節で与えた辞書（表 1〜5）に基づき，結び目理論と数論の間の諸概念，定理たちの間の類似性を調べることができます．ここでは 2 つの基本的な例を挙げます（詳しくは，文献 12) を参照）．

2.1 まつわり数と平方剰余

$K \cup L \subset \boldsymbol{R}^3$ を 2 成分絡み目とします．$X_K = \boldsymbol{R}^3 \setminus \mathrm{int}(V_K)$ の 2 次被覆 Y_K に対し，L が引き起こす Y_L の被覆変換 $[L] \in \mathrm{Gal}(Y_K/X_K) \simeq \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ が K と L の mod 2 のまつわり数です．

$$\pi_1(X_K) \to \mathrm{Gal}(Y_K/X_K) \simeq \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z},$$
$$[L] \mapsto \mathrm{lk}(K, L) \bmod 2.$$

一方，$\{p, q\} \subset \mathrm{Spec}(\boldsymbol{Z})$ を相異なる 2 奇素数とします．分岐する素点が p のみであるような 2 次拡大 $k/\boldsymbol{Q}$ が存在する条件は $p \equiv 1 \bmod 4$ なので，これを仮定します（これは，$\{p\} \subset \mathrm{Spec}(\boldsymbol{Z})$ がヌルホモロガス mod 2 である条件なので，まつわり数を定義するのに自然な条件です）．このとき，$k = \boldsymbol{Q}(\sqrt{p})$．表 1 より，$X_{\{p\}} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{Z}) \setminus \{p\}$ の 2 次エタール被覆 Y_p に対し，q 上の Frobenius 自己同型 $\sigma_q \in \mathrm{Gal}(Y_p/X_{\{p\}}) = \mathrm{Gal}(\boldsymbol{Q}(\sqrt{p})/\boldsymbol{Q}) \simeq \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ が p と q の mod 2 のまつわり数 $\mathrm{lk}_2(p, q)$ です．

$$\pi_1(X_{\{p\}}) \to \mathrm{Gal}(\boldsymbol{Q}(\sqrt{p})/\boldsymbol{Q}) \simeq \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z},$$
$$[\sigma_q] \mapsto \mathrm{lk}_2(p, q).$$

Frobenius 自己同型の定義より，$(-1)^{\mathrm{lk}_2(p,q)}$ は平方剰余記号 $\left(\frac{p}{q}\right)$ に他なりません．つまり，平方剰余記号とは，mod 2 のまつわり数のことで，平方剰余の相互律はまつわり数の対称性を意味しています（表 6）．

さらに，絡み目の高次まつわり数（Milnor 不変量）の構成の類似を追求することにより，素数たちに対して高次まつわり数の数論版を導入することができます．特に，Rédei が 1939 年に定義し，その意味など長らく不

*1）　一つの見方は，$\mathcal{O}_k$ 内の 1 のべき根の集合を定数体と見なすことで，実際，岩澤理論では，1 つの素数 p を固定し，1 の p べき根を添加して生じる代数体の塔 k_∞/k を定数拡大の類似と見て，幾何的コホモロジーの類似物が構成されます．しかし，定数体の拡大と異なり，拡大 k_∞/k では p 上の分岐が生じる（したがって，Frobenius でなくモノドロミー）ので，2.2 で述べるように，k_∞/k は結び目で分岐する 3 次元多様体の塔の類似と見なすほうが適当です．

明だったあるトリプリべき剰余記号が3重まつわり数として解釈されます．

表6

まつわり数	平方剰余記号
まつわり数の対称性 $\mathrm{lk}(K,L)=\mathrm{lk}(L,K)$	平方剰余の相互法則 $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$ $(p,q\equiv 1 \bmod 4)$
Milnor 不変量	多重べき剰余記号

2.2 Alexander 理論と岩澤理論

結び目補空間の無限巡回被覆と代数体の円分 $\boldsymbol{Z}_p$-拡大を類似と見なすことにより，Alexander-Fox 理論と岩澤理論の間に親密な並行性が見られます．

M を有理ホモロジー球面，K を M 内の結び目とし，$X_K=M\setminus \mathrm{int}(V_K)$ とおきます．K は M の中でヌルホモロガスとすると，

$$H_1(X_K)=\langle\alpha_K\rangle\oplus(\text{有限群}),\quad \langle\alpha_K\rangle=\boldsymbol{Z}$$

となり，X_K 上に無限巡回被覆 X_∞ が唯一つ存在します．γ_K をメリディアン α_K に対応する $\mathrm{Gal}(X_\infty/X_K)$ の生成元とします．$H_1(X_\infty)$ は $\mathrm{Gal}(X_\infty/X_K)$ が作用する加群で，結び目加群と呼ばれます．このとき，Alexander 多項式がモノドロミー γ_K の特性多項式

$$\Delta_K(t):=\det(t\cdot\mathrm{id}-\gamma_K\mid H_1(X_\infty)\otimes_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Q})$$

により定義されます．X_∞/X_K の n 次巡回部分被覆の Fox 完備化を M_n とし，M_n はすべて有理ホモロジー球面と仮定します．このとき，

$$\#H_1(M_n)=\prod_{\zeta^n=1}|\Delta_K(\zeta)|$$

が成り立ち，これから，次の漸近式を得ます．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\#H_1(M_n)=m(\Delta_K).$$

ここで，$m(\Delta_K):=\int_0^1\log|\Delta_K(\exp(2\pi\sqrt{-1}x))|dx$ は Δ_K の対数的 Mahler 測度．したがって，$\#H_1(M_n)\sim ce^{m(\Delta_K)n}$ $(n\gg 0)$．また，Alexander 多項式はその定義からモノドロミー作用 $\gamma_K: X_\infty\to X_\infty$ の Lefschetz ゼータ関数として表せ (Milnor)，さらに X_∞ の Reidemeister トーションでもあるので，スペクトラルゼータ関数とも関係します（Cheeger-Müller-Lück）．特に，X_K が双曲多様体のとき，X_K の閉測地線のゼータ関数と Alexander 多項式の関係が杉山健一氏により示されています．

一方，k を有限次代数体，p を素数とします．k に 1 の p べき乗根 $\zeta_n=\exp(2\pi\sqrt{-1}/p^n)$ をすべて添加した体 $k(\zeta_n;n\geq 1)$ の中には k 上の Galois 群が $\boldsymbol{Z}_p$ と同型になるような唯一つの拡大 k_∞ が存在し，k の円分 $\boldsymbol{Z}_p$-拡大と呼ばれます．結び目の場合に対応する仮定として，p 上の k の素イデアル $\mathfrak{p}$ は唯一つで，$\mathfrak{p}$ は k_∞/k で完全分岐するとします．$\mathrm{Gal}(k_\infty/k)$ の生成元を γ_p，k_∞/k の p^n 次部分拡大を k_n とします．表5の類似から，結び目加群の類似を得るため，k_n のイデアル類群の p-Sylow 部分群を H_n とし，$H_\infty:=\varprojlim_n H_n$ を考えます（射影極限はノルム写像に関する）．H_∞ は $\mathrm{Gal}(k_\infty/k)$ が作用するコンパクト加群で，岩澤加群と呼ばれます．Alexander 多項式の類似物はモノドロミー γ_p の特性多項式

$$I_p(T):=\det(T\cdot\mathrm{id}-(\gamma_p-1)\mid H_\infty\otimes_{\boldsymbol{Z}_p}\boldsymbol{Q}_p)$$

で，岩澤多項式と呼ばれます．

$\#H_n$ と $\prod_{\zeta^{p^n}=1}|I_p(\zeta-1)|_p^{-1}$ は，H_∞ が p-ねじれ部分をもたないならある定数倍を除き一致します．これから岩澤の類数公式

$$\log_p\#H_n=\mu p^n+\lambda n+\nu,\qquad n\gg 0$$

が従います．ここで，μ,λ,ν は n によらない定数で，$\mu=0$ と予想されています．この予想の下では，$\#H_n\sim cp^{\lambda n}$ $(n\gg 0)$．Alexander 多項式と同様に，岩澤多項式は p-進解析的ゼータ関数を与えます（岩澤主予想，Mazur-Wiles）．

表7

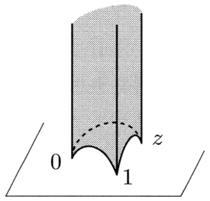
無限巡回被覆	円分 $\boldsymbol{Z}_p$-拡大
結び目加群	岩澤加群
Alexander 多項式	岩澤多項式
$\#H_1(M_n)$ の漸近式	岩澤類数公式
Alexander 多項式と Lefschetz（スペクトラル）ゼータ関数の関係	岩澤多項式と p-進解析的ゼータ関数の関係（岩澤主予想）

3. 双曲構造の変形と肥田変形

2.2 節で述べた Alexander-Fox 理論と岩澤理論はそれぞれ結び目群および素数群（表4参照）の1次表現の理論と見なすことができます．したがって，高次の表現のモジュライ（変形）とその上の不変量を考えることは両者の非 Abel 化を与えます．特に，双曲構造の変形から生じる2次元表現の族と p-通常保型形式の p-進変形から生じる2次元表現の族の間には興味深い類似性が見られます．この2つの変形空間の類似性は初め藤原一宏氏により指摘されました．3, 4, 5.1 節は，藤原氏の指摘に示唆され，寺嶋郁二氏と行った共同研究によります．

結び目 $K\subset S^3$ が双曲的，すなわち，$S^3\setminus K$ が有限体積を持つ完備双曲多様体とします．このとき，$S^3\setminus K$

は3次元双曲空間内の双曲理想4面体 $S(z)$（右図）を有限個，面に沿って貼り合わせたものになります．$S^3\backslash K=S(z_1^\circ)\cup\cdots\cup S(z_n^\circ)$．1辺の周りの面角が 2π という条件から，$z^\circ=(z_1^\circ,\cdots,z_n^\circ)$ はある代数方程式を満たします．この方程式が定める代数多様体の z° を含む連結成分を双曲構造の変形空間といい，$\mathfrak{X}_K$ と表します．$\mathfrak{X}_K$ は G_K の表現のモジュライと次のように関係します．z° に伴うホロノミー表現（の $SL_2(\boldsymbol{C})$-表現への持ち上げ）を $\rho^\circ:G_K\to SL_2(\boldsymbol{C})$ とし，指標多様体 $\mathrm{Hom}(G_K,SL_2(\boldsymbol{C}))//(SL_2(\boldsymbol{C})$-共役作用）の $[\rho^\circ]$ を含む既約成分を $\mathfrak{Y}_K$ とすると，$z\in\mathfrak{X}_K$ にそのホロノミー表現 $[\rho_z]\in\mathfrak{Y}_K$ を対応させる写像は，$[\rho^\circ]$ の近傍で2重被覆を与えます．K のメリディアンとロンジチュードを各々 $\alpha,\beta\subset\partial V_K$ とします．$z\in\mathfrak{X}_K$ に対し，ペリフェラル群 $D_K=\pi_1(\partial V_K)$ は可換群なので，$\rho_z|_{D_K}$ は上三角行列表現と同値になり，



$$\rho_z(\alpha)\simeq\begin{pmatrix}x_K(z) & * \\ 0 & 1/x_K(z)\end{pmatrix},$$

$$\rho_z(\beta)\simeq\begin{pmatrix}y_K(z) & * \\ 0 & 1/y_K(z)\end{pmatrix}$$

と表せますが，$x_K:\mathfrak{X}_K\to\boldsymbol{C}$ は z° の近傍で $\mathfrak{X}_K$ の局所座標を与えます．特に，$\mathfrak{X}_K$ は複素代数曲線になります（Thurston, Neumann-Zagier）．また，∂V_K の周期を q_K とします（$\partial V_K=\boldsymbol{C}^\times/(q_K)^{\boldsymbol{Z}}$）．このとき，次が成り立ちます（Neumann-Zagier）．

$$\frac{\log(q_K)}{2\pi\sqrt{-1}}=\left.\frac{dy_K}{dx_K}\right|_{x_K=z^\circ}.$$

一方，数論側では，レベル p べきの合同部分群（$\subset SL_2(\boldsymbol{Z})$）に関する p-通常的尖点固有形式 f° の p-通常変形を考えます．ここで，尖点固有形式 f が p-通常的とは，p 番 Fourier 係数が p-進単数となることです．このような保型形式の p-進族は初め肥田晴三氏により構成され，後に Mazur により Galois 表現の変形の観点から見直されました．今，$\bar{\rho}:G_{\{p\}}\to GL_2(\boldsymbol{F}_p)$ が f° に伴う p-進表現の剰余表現とします．$\bar{\rho}$ の p-通常変形とは，連続表現 $\rho:G_{\{p\}}\to GL_2(A)$（$A$ は完備 Noether 環）で，

$$\begin{cases}(1)\ \rho \bmod \mathfrak{m}_A\simeq\bar{\rho}\ (\mathfrak{m}_A \text{ は } A \text{ の極大イデアル}),\\ (2)\ \rho|_{D_{\{p\}}}\simeq\begin{pmatrix}\chi_1 & * \\ 0 & \chi_2\end{pmatrix},\ \ \chi_2|_{I_{\{p\}}}=1.\end{cases}$$

を満たすもののことです．p-通常性の条件 (2) は，結び目の場合に自動的に成り立っている条件の数論的な類似と見なされます（表4参照）．また，保型形式の p-通常性はそれに伴う表現の p-通常性を意味します．肥田氏は，f° の p-通常変形に伴う Galois 表現を生み出す普遍的な Galois 表現 $\boldsymbol{\rho}:G_{\{p\}}\to GL_2(\boldsymbol{T})$ を構成しました．$\boldsymbol{T}$ は p-進 Hecke 環といい，$\mathfrak{X}_p:=\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}_p\text{-代数}}(\boldsymbol{T},\overline{\boldsymbol{Q}}_p)$ を肥田変形空間といいます．ここで，$\varphi\in\mathfrak{X}_p$ と $\varphi\circ\boldsymbol{\rho}:G_{\{p\}}\to GL_2(\overline{\boldsymbol{Q}}_p)$ および対応する p-進保型形式 f を同一視します．

$$\boldsymbol{\rho}|_{D_{\{p\}}}\simeq\begin{pmatrix}\boldsymbol{\chi}_1 & * \\ 0 & \boldsymbol{\chi}_2\end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{\chi}_2|_{I_{\{p\}}}=\boldsymbol{1}$$

と書くとき，あるモノドロミー $\tau_p\in I_{\{p\}}$ がとれ，$x_p:=\boldsymbol{\chi}_1(\tau_p)$ は f° の近傍で $\mathfrak{X}_p$ の局所座標を与えます．特に，$\mathfrak{X}_p$ の f° を含む既約成分は p-進解析曲線になります．また，p 上の Frobenius 自己同型 σ_p に対し，$y_p:=\boldsymbol{\chi}_2(\sigma_p)$ とおきます．

今，ρ° が $\boldsymbol{Q}$ 上のある種の楕円曲線 E の p べき等分点から生じる表現とします．楕円曲線の p-進 L-関数の理論において，$\mathfrak{L}$-不変量と呼ばれる数論的量 $\mathfrak{L}(E)$ が定義されますが，$\mathfrak{L}(E)$ は上に述べた関数 x_p,y_p および E の Tate 周期 q_E（$E(\overline{\boldsymbol{Q}}_p)=\overline{\boldsymbol{Q}}_p^\times/(q_E)^{\boldsymbol{Z}}$）と次のように関係します．

$$\mathfrak{L}(E)=\frac{\log_p(q_E)}{\mathrm{ord}_p(q_E)}=-2\left.\frac{dy_p}{dx_p}\right|_{x_p=f^\circ}.$$

ここで，$\log_p$ は p-進対数を表します．

表8

3次元双曲幾何	肥田理論
完備双曲構造 z° と 付随するホロノミー表現 双曲構造の変形空間 $\mathfrak{X}_K$	p-通常保型形式 f° と 付随する Galois 表現 肥田変形空間 $\mathfrak{X}_p$
双曲構造 z と付随する ホロノミー表現	p-進通常保型形式 f と 付随する Galois 表現
整係数 Dehn 手術点	整数重さを持つ保型形式
メリディアン関数 x_K ロンジチュード関数 y_K	モノドロミー関数 x_p Frobenius 関数 y_p
x_K は z° における $\mathfrak{X}_K$ の局所座標	x_p は f° における $\mathfrak{X}_p$ の局所座標
$\partial X_K=\boldsymbol{C}^\times/(q_K)^{\boldsymbol{Z}}$ $\left.\frac{dy_K}{dx_K}\right\|_{z=z^\circ}=\frac{\log(q_K)}{2\pi\sqrt{-1}}$	$E(\overline{\boldsymbol{Q}}_p)=\overline{\boldsymbol{Q}}_p^\times/(q_E)^{\boldsymbol{Z}}$ $\left.\frac{dy_p}{dx_p}\right\|_{f=f^\circ}=-\frac{\log_p(q_E)}{2\mathrm{ord}_p(q_E)}$

4. Chern-Simons 変動と多重対数変動

3節で見たように，双曲構造の変形空間 $\mathfrak{X}_K$ と p-進保型形式の肥田変形空間 $\mathfrak{X}_p$ は類似する構造を持つので，双方の空間上に定義される不変量たちの類似を追求することが次の問題です．

4.1 Chern-Simons 汎関数と p-進 L-関数

$\mathfrak{X}_K$ 上に定義される代表的な不変量として，Chern-Simons 汎関数 $CS(z)$ ($z \in \mathfrak{X}_K$) があります．$z \in \mathfrak{X}_K$ に対し，ρ_z に対応する平坦接続 ($sl_2(\boldsymbol{C})$-値微分 1-形式) を A_z とするとき，$SL_2(\boldsymbol{C})$ Chern-Simons 汎関数が

$$CS(z) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{X_K} \mathrm{Tr}\left(A_z \wedge dA_z + \frac{2}{3}A_z \wedge A_z \wedge A_z\right)$$

により定義されます．ここではこれを少し変えた Chern-Simons ポテンシャル

$$\Phi_K(z) := 2\pi^2 CS(z) + \frac{1}{2}\log x_K \log y_K$$

を考えます．$\Phi_K(z)$ は吉田朋好，Kirk-Klassen 氏の結果により，z° の近傍では，反復積分 $\int_{z^\circ}^{z} d\log y_K d\log x_K$ で表せます．このことを，$S(z)$ の双曲体積と 2 重対数関数 $\int_0^z d\log(1-z)d\log z$ の関係の発展版と見て，寺嶋氏と筆者は，$\Phi_K(z)$ をメリディアン関数 x_K とロンジチュード関数 y_K の Deligne コホモロジーにおけるカップ積を用いて解釈しました．Deligne コホモロジーにおけるカップ積はいわば "関数論的なまつわり数" なので，$\Phi_K(z) =$ "x_K と y_K のまつわり数" という見方が得られたことになります．これより，$\mathfrak{X}_K$ 上に混合 Hodge 構造の変動——Chern-Simons 変動という——が生じることも従います．3 節の類似から，x_p, y_p を用いて，肥田変形空間 $\mathfrak{X}_p$ 上にも Chern-Simons ポテンシャルの類似物 $\Phi_p(f)$ が定義されます．古典的な p-進 L-関数と p-進 2 重対数関数との関係は，$\Phi_p(f)$ と北川浩二氏らの p-進 L-関数の $s = 2$ での特殊値 $L_p(f, 2)$ の関係を示唆しているように思われます．逆に，$L_p(f, s)$ の結び目側の類似，すなわち，$s = 2$ での値が $\Phi_K(z)$ となるような "Chern-Simons L-関数" $L_K(z, s)$ をつくることは興味深い問題と思われます．

4.2 モチーフと結び目不変量のアデール化

多重対数関数が与える混合 Hodge 構造の変動はある混合モチーフの Hodge 実現であることが知られています (Beilinson-Deligne)．これは，Chern-Simons 変動についても同様なモチーフの存在を示唆しています：

予想　Chern-Simons 変動は変形空間 $\mathfrak{X}_K$ 上のある混合モチーフの変動の Hodge 実現であろう．

このモチーフの存在を感じとるため，z を整係数 Dehn 手術点とし，$M(z)$ を対応する K に沿う Dehn 手術により得られる閉双曲多様体とします．このとき，$M(z)$ の Chern-Simons 不変量と双曲体積は，ある "モチーフ" $m(z) \in K_3(\boldsymbol{C})$ の Beilinson レギュレーター $K_3(\boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{C}/\boldsymbol{Q}$ による像で表されます．このようなモチーフを仮定すれば，いろいろな実現 (p-進エタール，$\cdots$) により Chern-Simons 汎関数のバリエーションが得られます．従来，結び目不変量は複素数 (多項式) 値でしたが，p-進さらにアデリックな値を持つ不変量へと拡張してゆくことは今後の問題と思います．

5. 今後の夢

4 節で述べた問題に加え，結び目理論と数論の関連について今後の問題や夢を述べたいと思います．

5.1 ゲージ理論と肥田理論

$S^3 \setminus K$ の双曲構造の変形と Chern-Simons ポテンシャルの構造は，4 次元 Seiberg-Witten 理論で真空のモジュライ (u-平面) $\mathfrak{U}$ 上に楕円曲線の族

$$\mathcal{E}_u : w^2 = (z^2-1)(z-u) \quad (u \in \mathfrak{U})$$

がのっていることと Seiberg-Witten プレポテンシャルの構造とも表 9 のように類似しています．$\lambda = (u-z)dz/w$, γ, δ は $H_1(\mathcal{E}_u)$ のシンプレクティック底とします．

Seiberg-Witten 理論では，da/du, da_D/du の満たす Picard-Fuchs 型の微分方程式を解いて F を求めました．同様なことを結び目の Chern-Simons 理論で行うことは面白い問題のように思います．また，4 節の類似を合わせると，肥田理論が 3, 4 次元ゲージ理論と繋がってきます．次に述べる夢とも関係して，これらの類似とその根源を追求することは興味深く思われます．

5.2 場の理論と非可換類体論

非可換類体論とは，Galois 表現

表 9

3 次元双曲幾何	Seiberg-Witten 理論
双曲構造の変形空間 $\mathfrak{X}_K$	真空のモジュライ $\mathfrak{U}$
楕円曲線の変形 $\mathcal{E} \to \mathfrak{X}_K$	楕円曲線の族 $\mathcal{E} \to \mathfrak{U}$
メリディアン関数 x_K	電荷 $a = \int_\gamma \lambda$
ロンジチュード関数 y_K	磁荷 $a_D = \int_\delta \lambda$
∂V_K のモジュラス dy_k/dx_K	ゲージカップリング da_D/da
Chern-Simons ポテンシャル Φ_K $d\Phi_K/x_K = y_K$	Seiberg-Witten プレポテンシャル F $dF/da = a_D$
$CS(z) = \frac{1}{8\pi^2}\left(2 - x\frac{d}{dx}\right)\Phi_K$	$u = \frac{\pi i}{2}\left(2 - a\frac{d}{da}\right)F$

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q}) \to GL_n(\overline{\boldsymbol{Q}}_l)$$

と保型形式

$$GL_n(\boldsymbol{Q})\backslash GL_n(\boldsymbol{A}) \to \boldsymbol{C} \quad (\boldsymbol{A}\ \text{はアデール環})$$

の間の L-関数を保つ対応 $\mathcal{L}$——Langlands 対応と呼ばれます——をいいます．Langlands 対応の顕著な性質の 1 つは，n をすべて動かすとき，$\mathcal{L}$ は直和を保たず，$\mathcal{L}(\rho \oplus \rho')$ はテンソル積 $\mathcal{L}(\rho) \otimes \mathcal{L}(\rho')$（の誘導表現）になることです．この構造から，M. Kapranov 氏は Langlands 対応と (2+1) 次元位相的場の理論の類似性を指摘しています[3]．保型形式 $\mathcal{L}(\rho)$ には状態空間 $\mathcal{Z}(\partial M)$，保型 L-関数 $L(\mathcal{L}(\rho), s)$ には相関関数 $Z(M)$ が対応すると考えます（M は 3 次元多様体）．一般に，物理における経路積分による相関関数は，数論における L-関数に対応する，と言ってもうなずかれる物理学者も少なくないのではないかと思います．

一方，類体論の別方向の非可換化として，伊原康隆，Drinfeld 氏らによって創められた研究があります．伊原氏は，組み紐群の自由群作用の類似とみられる Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$ の表現を構成しました．組み紐群は，河野俊丈，Drinfeld, 土屋昭博氏らの理論により，量子群や 2 次元共形場理論と密接な関係があるので，$\mathrm{Gal}(\overline{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$ が量子群や共形場理論と結びつきます．

Langlands の非可換類体論と伊原・Drinfeld の理論はともに代数体の非可換拡大を扱うにもかかわらず，その関係はよくわかっていません．筆者の夢は，両者の関係を結び目理論と場の理論の視点から理解することです．

5.3 葉廣環と $\boldsymbol{F}_1$

$\boldsymbol{F}_1$ とは $\boldsymbol{Z}$ の仮想的な定数体のことです．各自然数 n に対し，$\boldsymbol{F}_1$ は，1 の n 乗根に対応する仮想的な n 次拡大 $\boldsymbol{F}_{1^n}$ を持ち，スキーム X に対し，$X(\boldsymbol{F}_{1^n}) = X(\boldsymbol{Z}[q]/(q^n - 1))$ と考えます．一方，葉廣環とは，整ホモロジー球面 M の Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量 $\tau_\zeta(M)$（ζ は 1 のべき根）の親玉が住む環で，

$$\widehat{\boldsymbol{Z}[q]} = \varprojlim_n \boldsymbol{Z}[q]/((1-q)\cdots(1-q^n))$$

と定義されます．葉廣和夫氏は，整ホモロジー球面のなす環 $\boldsymbol{Z}HS$（積は連結和）から $\widehat{\boldsymbol{Z}[q]}$ への環準同型 J で，$J(M)|_{q=\zeta} = \tau_\zeta(M)$ となるものを構成しました[6]．$\widehat{\boldsymbol{Z}[q]}$ の元は 1 のべき根の集合上で定義された関数と見なせることから，Y. Manin, M. Marcolli 氏は，葉廣環 $\widehat{\boldsymbol{Z}[q]}$ は $\boldsymbol{F}_1$-アフィン直線の上の解析関数環と見なせること，$(\boldsymbol{Z}HS, J)$ は $\boldsymbol{F}_1$ 上の多様体を定めることを指摘しています[8]．

$\boldsymbol{F}_1$-幾何は我々の類似性とも整合します．例えば，n べき剰余記号は $\boldsymbol{F}_{1^n}$-幾何の観点からもまつわり数として自然に解釈されます．久保田富雄氏によるべき剰余の相互法則の幾何学的証明も $\boldsymbol{F}_{1^n}$-幾何の観点から見直してみることは興味深い問題です．ただ，$\boldsymbol{F}_1$-幾何は 1 つの問題を抱えています．それは未だ Galois 理論がないということです．1.1 節の Deninger 氏の予想は，$\mathrm{Spec}(\boldsymbol{F}_1)$ の基本群は $\boldsymbol{R}$ であると述べています．$\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{F}_1$ 上有限型ではなく，代数体に 1 のべき根を加える拡大も不分岐でなくてはなりません．よって，従来の代数的数論とは全く違う理論をつくらなければなりません．

Gauss の平方剰余，まつわり数と電磁気学の関係は，200 年経った今，現代数論，量子トポロジーと場の量子論の関係として受け継がれています．

原稿を読み，有益なコメントを下さった加藤晃史，寺嶋郁二，藤博之氏に感謝いたします．

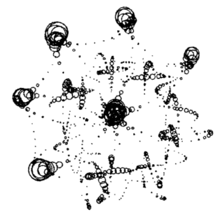
参考文献

1) 江口徹，物理学に現われる双対性，別冊・数理科学，双対性の世界，2007, 6–13.
2) 加藤晃史，双対性の役割，別冊・数理科学，双対性の世界，2007, 24–31.
3) M. Kapranov, Analogies between the Langlands correspondence and topological quantum field theory, Progr. Math., **131**, Birkhäuser, 1995, 119–151.
4) 砂田利一，『基本群とラプラシアン』，紀伊國屋書店，1988.
5) C. Deninger, Some analogies between number theory and dynamical systems on foliated spaces, Proc. of ICM (Berlin, 1998). Doc. Math., 1998, Extra Vol.I, 163–186.
6) K. Habiro, A unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariant for integral homology spheres, *Invent. Math.*, **171** (2008), 1–81.
7) Y. Manin, Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa), *Asterisque*, **228** (1995), 121–163.
8) Y. Manin, Cyclotomy and analytic geometry over $\mathbb{F}_1$, math.AG, arXiv:0809.1564, 2008.
9) B. Mazur, Notes on étale cohomology of number fields, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **6** (1973), 521–552.
10) 森下昌紀，数論と 3 次元トポロジー，数理科学，2003, 6 月号，34–40.
11) 森下昌紀，幾何学と数論，数理科学，2005, 8 月号，14–19.
12) 森下昌紀，『結び目と素数』，現代数学シリーズ **15**，シュプリンガー・ジャパン，2009.

（もりした・まさのり，九州大学大学院数理学研究院）

Planar algebra 入門

作用素環論から低次元トポロジーへの新しい流れ



佐藤 信哉

1. はじめに

Planar algebra は subfactor に由来するデータを **subfactor** を経由しないで低次元トポロジーへの応用を与えてくれる道具としても役に立ち始めつつある．その概略について，説明することが本稿の目的である．

V.F.R. Jones は，1980 年代の前半に subfactor 理論[2)]を創始した．無限次元ヒルベルト空間上のある位相で閉じた無限次元代数 M (単位元を1_Mと表す) で，正規化されたトレース tr (連続な線型汎関数 $\mathrm{tr}: M \to \boldsymbol{C}$ で，$\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$ $(\forall x, y \in M)$, $\mathrm{tr}(1_M) = 1$ をみたすもののこと) を持ち，中心が自明である，II_1-factor と呼ばれるものに含まれる部分代数としての II_1-subfactor N, すなわち, subfactor $N \subset M$ を考え，この包含関係がとても豊かな数学的構造を持つことを示したのである．そこで重要な役割を果たすのが basic construction と呼ばれる方法である．これは, M 上のトレースによる内積を使って M を完備化したヒルベルト空間 $L^2(M)$ に M が自然に作用することを利用し，$L^2(M)$ から $L^2(N)$ への直交射影 e_1 と，$L^2(M)$ に作用する M によって生成される II_1-factor $M_1 = \langle M, e_1 \rangle$ をつくるという方法である．この方法は繰り返し行うことができて，結果として $N \subset M \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \cdots$ なる II_1-factor の増大列（Jones tower）を得る．Jones は，この Jones tower からそれを構成する直交射影（Jones 射影）の列 $\{e_i\}_{i \geq 1}$ が，組みひも群に似た関係式を満たすことに気づき，subfactor の持つ自然なトレースを用いれば，Jones 射影の列は結び目に対する多項式不変量（Jones 多項式）を与えることに気づいた．これが，作用素環という無限次元の位相的な代数と，結び目の多項式不変量という低次元トポロジーの驚きともいえる結びつきの始まりだった．

Jones 射影の満たす関係式は次のとおりである．

(i) $e_i^2 = e_i = e_i^*$

(ii) $e_i e_{i\pm1} e_i = \tau e_i$

(iii) $e_i e_j = e_j e_i, \ |i-j| \geq 2$

ここで，$\tau^{-1} = [M : N]$ は Jones 指数と呼ばれる，subfactor の不変量の 1 つで，$\{4\cos^2(\pi/n) | n \geq 3\} \cup [4, \infty]$ に値を取るものである．以後，Jones 指数は有限であるものとする．

Jones は，1_M と $\{e_i\}_{i\geq1}$ で生成される (*-) 代数を **Temperley-Lieb algebra**（Jones 代数とも呼ばれる）と名づけた[2)]．Temperley-Lieb algebra はフィルター付き代数であり，

$$TL_n = \langle 1_M, e_1, \cdots, e_{n-1} \rangle,$$

$$TL = \bigcup_{n=1}^{\infty} TL_n, \quad TL_1 = \boldsymbol{C}1_M$$

と表される．

$\delta > 0$ かつ $\delta^2 \tau = 1$ を満たすものとして δ を定め，$E_i = \delta e_i$ とおくと，上述の関係式は次のようになる．これも Temperley-Lieb algebra と呼ばれる．(1_M はすべての TL_n における単位元であり，以後，$1_n \in TL_n$ と表すことにする．)

$$TL_n(\delta) = \langle 1_n, E_1, \cdots, E_{n-1} \rangle,$$

$$TL(\delta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} TL_n(\delta), \quad TL_1(\delta) = \boldsymbol{C}1_1$$

と表される．

(i)′ $E_i^2 = \delta E_i = E_i^*$

(ii)′ $E_i E_{i\pm1} E_i = E_i$

(iii)′ $E_i E_j = E_j E_i, \quad |i-j| \geq 2$

L. Kauffman は，Temperley-Lieb algebra は，図で表すことができることを示した[4,5)]（図 1）.

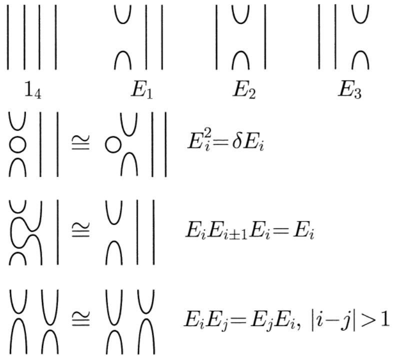


図 1　Temperley-Lieb algebra の生成元と関係式.

一方，subfactor$N \subset M$ から得られる Jones tower に対して，N に対する centralizer の列（各 centralizer は $\boldsymbol{C}$ 上有限次元代数であり，行列環の有限個の直和に代数として同型となることが知られている[2]）

$$\boldsymbol{C}=N'\cap N \subset N'\cap M \subset N'\cap M_1 \subset N'\cap M_2 \subset \cdots$$

は subfactor の重要な不変量であり，Jones 射影たちをすべて含む．そこで，Kauffman がやったようにこの増大列を図で表せば，この重要な不変量を計算できるのではないかと Jones は考えた．それが planar algebra の理論の始まりであり，もともとは subfactor の不変量を計算する道具として考えられたのである．

2. 平面図形のなす代数 $\mathcal{P}(L)$

k を 0 以上の整数とする．**標準 k-box**, $\mathcal{B}_k$ とは，

$$\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 0\le x\le k+1,\ 0\le y\le 1\}$$

で，$2k$ 個の印の付いた点，$1=(1,1)$, $2=(2,1)$, $3=(3,1),\cdots$, $k=(k,1)$, $k+1=(k,0)$, $k+2=(k-1,0),\cdots$, $2k=(1,0)$ を持つものをいう．

$\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $\mathcal{N}$ は，$\boldsymbol{R}^2$ における向きを保つ微分同相写像による $\mathcal{B}_k(k=0,1,2,\cdots)$ の互いに交わりを持たない像のなす有限集合の和集合と，滑らかに埋め込まれた向き付けられた交差することのない曲線（単純閉曲線を含む）の有限集合からなり，これらの曲線は $\mathcal{B}_k$ たちの印の付いた点を端点に持つか，$\mathcal{B}_k$ たちと交わらないかのどちらかいずれかであるものとする．$\mathcal{B}_k$ たちの印の付いた点はすべて曲線の端点であり，曲線と各 k-box はそれらの点で垂直に交わるものとする．

曲線の向きは次の 2 つの条件を満たさなければならない．

(a)　1 つの k-box の奇数でラベル付けられた点で交わる 1 本の曲線は，その k-box から出ていく向きを持つ．

(b)　$\boldsymbol{R}^2-\mathcal{N}$ の連結成分は，$\mathcal{N}$ の曲線の向きが，1 つの連結成分の境界の一部分として誘導される向きと一致する向きを持つ．

このような $\mathcal{N}$ を **planar network** という．

一般には，planar network 内には複数の k-box が含まれるため，それらを区別するための集合 $L_k(k=0,1,2,\cdots)$ を設ける．$L=\coprod_k L_k$ をそれらの非交和とする．L を**ラベル集合**と呼ぶ．

以下の説明では，ラベル集合として非対称なアルファベットを使うことにする．ただし，文字は，k-box に出入りする曲線に沿うように置き，番号でラベル付けられた k-box の端点は，左上を 1 として，時計回りに順番に番号を割り当てることする．このとき，1 の代わりに $*$ を付けることにする．このようにすると，曲線の向きと点の印を特定しないでもよいことになる．

Planar network $\mathcal{N}$ を標準 k-box $\mathcal{B}_k$ で切り取ったものを **planar k-tangle** $(k=0,1,2,\cdots)$ という．図 3 は，図 2 からつくった planar 3-tangle の例である．

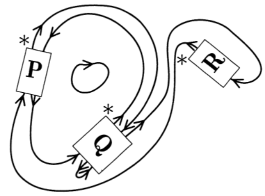


図 2　Planar network $\mathcal{N}$ の例.

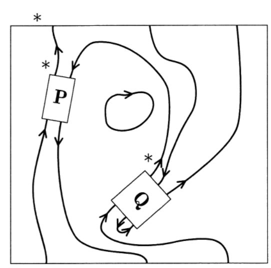


図 3　Planar 3-tangle の例.

ラベル付きの planar k-tangle の滑らかなイソトピー類のなす集合を $T_k(L)$ と表す．

$T_k(L)$ を基底に持つ $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間 $\mathcal{P}_k(L)$ を考える．$T_1, T_2 \in T_k(L)$ とする．$\tilde{T_2}$ は T_2 を y 軸の負の方向に 1 平行移動したものとする．必要ならば平面のイソトピーを用いて，T_1 と $\tilde{T_2}$ の曲線の和集合が滑らかな曲線となるように仮定してよい．ここで，$\{(x,0)\mid 0\le x\le k+1,\ x\notin \boldsymbol{Z}\}$ から $T_1\cup\tilde{T_2}$ を取り除き，最後に，y 座標を 1/2 倍してから，1/2 を加える．この結果として得られる planar k-tangle のイソ

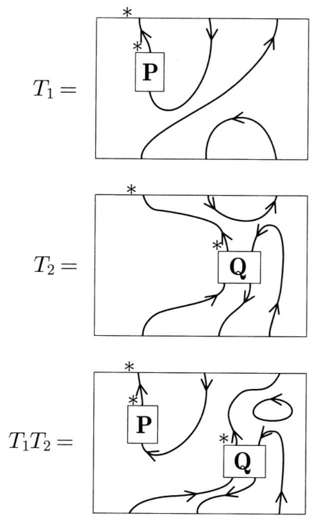


図 4　Planar tangle の積の例.

トピー類を T_1 と T_2 の積 T_1T_2 と定める（図 4）. これを線型に拡張して，$\mathcal{P}_k(L)$ に積を定めたものは $\boldsymbol{C}$ 上の結合的代数となる．各 $\mathcal{P}_k(L)$ は，上下をまっすぐに結ぶ線分からなる単位元があり，$\mathcal{P}_k(L)$ の各元 T に対して，右端に上下をまっすぐに結ぶ線分を加えた $\mathcal{P}_{k+1}(L)$ の元は，T を $\mathcal{P}_{k+1}(L)$ へ埋め込んだものと考えることができる．これにより，

$$\mathcal{P}(L) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k(L)$$

は $\boldsymbol{C}$ 上のフィルター付き代数となる．$\mathcal{P}(L)$ を **universal planar algebra** と呼ぶ．

定義 1　$\boldsymbol{C}$ 上のフィルター付き代数

$$P = \bigcup_{k=0}^{\infty} P_k$$

に対して，ある universal planar algebra$\mathcal{P}(L)$ が存在して，フィルター付き代数としての全射な準同型写像

$$\Phi : \mathcal{P}(L) \to P, \quad \Phi(\mathcal{P}_k) = P_k$$

が存在して，$\dim_{\boldsymbol{C}} P_0 = 1$ を満たすとき，

$$P = \bigcup_{k=0}^{\infty} P_k$$

を $\mathcal{P}(L)$ 上の **planar algebra** という．また，このとき，P は Φ による $\mathcal{P}(L)$ の表示を持つという．

実際には，$\ker \Phi$ について，少し条件が付くが，ここでは省いた．詳しくは文献 3) を参照のこと．

つまり，planar tangle という平面図形を使って表示することのできるフィルター付き代数が planar algebra である．Temperley-Lieb algebra

$$TL = \bigcup_{n=1}^{\infty} TL_n$$

は planar algebra のもっとも基本的な例である．また，BMW 代数は 2 つの異なる 2-box で生成される planar algebra の例である[3)].

Planar algebra P の表示写像 Φ を用いると，planar network $\mathcal{N}$ を 0-box の中に閉じ込めて Φ を施せば，それは $P_0 = \boldsymbol{C}1_P$ の元となるから，$\Phi(\mathcal{N}) = Z_\Phi(\mathcal{N})1_P$ となる複素数 $Z_\Phi(\mathcal{N})$ を得る．Z_Φ は planar network のイソトピー不変量となる．Planar network $\mathcal{N}$ を 2 次元球面 S^2 に貼り付けて，S^2 上のイソトピーで好きなように動かして，再び平面に戻すと別の planar network $\mathcal{N}'$ を得る．もし，$Z_\Phi(\mathcal{N}) = Z_\Phi(\mathcal{N}')$ が成り立つならば，planar algebra P は **spherical** という．Spherical planar algebra P に対しては，$Z_\Phi(\circlearrowright) = Z_\Phi(\circlearrowleft)$ となるので，これを $\delta(\neq 0)$ と表すことにする．同様に考えて，spherical planar algebra においては，P_k の任意の元 $\Phi(T)$ に対して，図 4 のようにして正規化されたトレースを定めることができる．このトレースはその定義から埋め込み $P_k \subset P_{k+1}$ と整合性を持つことから，$P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$ 上の正規化されたトレースとなる．

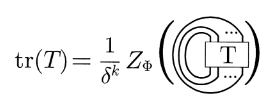


図 5　Spherical planar algebra におけるトレース.

最後に，planar algebra $P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$ の各 P_k に対して，随伴作用 $* : P_k \to P_k$ を次のように定める．

P_k の任意の planar k-tangle T を直線 $y = 1/2$ について反転させ，各 box を結ぶ曲線の向きを逆にしたものを T^* と定める（図 5）．随伴作用を考慮に入れた planar algebra を **$*$-planar algebra** という．

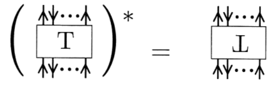


図 6　P における $*$-構造.

また，spherical $*$-planar algebra におけるトレースが，$P \ni \forall x \neq 0$ に対して $\mathrm{tr}(x^* x) > 0$ を満たすとき，planar algebra は**非退化である**という．

定義 2 Spherical $*$-planar algebra P が非退化であり，$\dim_{\mathbb{C}} P_k < \infty$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ を満たすとき，P を **subfactor planar algebra** という．

補足. (1) 1 節で述べた subfactor の centralizer の列は，上の定義の意味で subfactor planar algebra となることが知られている[3]．

(2) Subfactor planar algebra は δ を不変量に持つ．δ の取り得る値は，

$$\{2\cos(\pi/n) \mid n = 3, 4, 5, \cdots\} \cup [2, \infty)$$

であることが知られている．

3. Subfactor planar algebra

まず，subfactor planar algebra P に関する次の事実からこの節を始めよう．

$E_i (i = 1, \cdots, k-1)$ を $TL_k(\delta)$ の生成元とし，$e_i = \delta^{-1} E_i$ とおく．

定理 1 (1) 各 k に対して，$I_k = P_{k-1} e_{k-1} P_{k-1}$ は P_k の両側イデアルである．

(2) 次の (i) から (iv) を満たす P_k の極小射影の集まり $\mathcal{N}_k$ がユニタリ同値を除いて一意的に存在する．

(i) $\mathcal{N}_k \ni p$ に対して，$pP_k e_{k-1} = 0$ が成り立つ．

(ii) $p \neq q$ となる $\mathcal{N}_k$ の元に対して，$pP_k q = 0$ が成り立つ．

(iii) $P_k - I_k \ni x$ に対して，$xP_k p \neq 0$ となる $p \in \mathcal{N}_k$ が存在する．

(iv) 任意の $p \in \mathcal{N}_k$ に対して，$\mathrm{tr}(p) \neq 0$ である．

定義 3 上の定理のように $\mathcal{N}_k$ を取るとき，$\mathcal{M} = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{N}_k$ を頂点集合とし，頂点 $p \in \mathcal{N}_k$ と頂点 $q \in \mathcal{N}_{k+1}$ を結ぶ辺の本数が $\dim_{\mathbb{C}}(pP_{k+1}q)$ で与えられるグラフを subfactor planar algebra P の **principal graph** という．

以下，$\delta = q + q^{-1}$, $q = e^{\frac{i\pi}{n+1}}$ とおく．このとき，$\delta = 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ であることを注意しておく．

Subfactor planar algebra の例を挙げる前に，これからの話で重要な役割を果たす $TL_n(\delta)$ の特別な元について説明する．

定義 4 $TL_n(\delta)$ の元 $f^{(n)}$ で，

$$f^{(n)} e_i = e_i f^{(n)} = 0, \quad i = 1, \cdots, n-1$$

を満たす極小射影 $f^{(n)}$ がただ 1 つ存在する．これを **Jones-Wenzl 射影**[10] という．

• A_n subfactor planar algebra

$TL(\delta)$ において，関係式

(1) $\delta = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$,

(2) $f^{(n)} = 0$

とおいて得られる planar algebra は subfactor planar algebra であり，定理 1 で述べた極小射影の集まり全体 $\mathcal{M} = \bigcup_k \mathcal{N}_k$ は，$\mathcal{M} = \{f^{(0)}, f^{(1)}, \cdots, f^{(n-1)}\}$ で与えられる．このとき，principal graph は Dynkin 図形の A_n 型であることが計算によって確かめられる．この planar algebra を **A_n subfactor planar algebra** と呼ぶ．

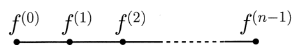


図 7 A_n subfactor planar algebra の principal graph.

A_n subfactor planar algebra のように，subfactor planar algebra は生成元と関係式を用いて表される場合がある．Morrison-Peters-Snyder は，そのような subfactor planar algebra として，次のようなものを構成した[6]．

• D_{2n} subfactor planar algebra

1 つの $(2n-2)$-box S で生成される planar algebra で次の関係式を満たすものを $\mathcal{PA}(S)$ と表す．

(1) $\delta = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4n-2}\right)$.

(2) $f^{(4n-3)} = 0$.

(3) $\rho(S) = -S$. ただし，$\rho(S)$ は図 8 にある $(2n-2)$-box を表す．

(4) $\tau(S) = 0$. ただし，$\tau(S)$ は図 9 にある $(2n-3)$-box を表す．

(5) $S^2 = f^{(2n-2)}$.

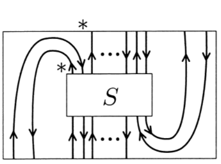


図 8 $\rho(S)$.

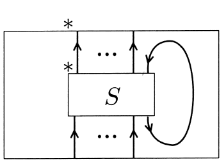


図 9 $\tau(S)$.

彼らの結果をまとめると，次のようになる[6]．

定理 2 (1) $\mathcal{PA}(S)$ は subfactor planar algebra であり，*-構造は $S^* = S$ で与えられる．

(2) 定理 1 で述べた極小射影の集まり全体

$$\mathcal{M} = \bigcup_k \mathcal{N}_k$$

は，$\mathcal{M} = \{f^{(0)}, f^{(1)}, \cdots, f^{(2n-3)}, P, Q\}$ で与えられる．ここで，

$$P = \frac{1}{2}\left(f^{(2n-2)} + S\right),$$

$$Q = \frac{1}{2}\left(f^{(2n-2)} - S\right)$$

で与えられる．このとき，principal graph は Dynkin 図形の D_{2n} 型である（図 10）．

この planar algebra を D_{2n} **subfactor planar algebra** と呼ぶ．

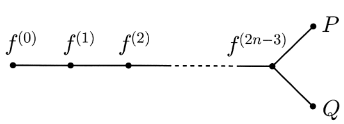


図 10　D_{2n} subfactor planar algebra の principal graph.

補足． Dynkin 図形 E_6, E_8 を principal graph に持つ subfactor planar algebra は，それぞれ 1 つの 3-box，1 つの 5-box から生成される planar algebra で，D_{2n} subfactor planar algebra の 5 つの関係式によく似た関係式を満たすことが知られている[1]．

4. D_{2n} subfactor planar algebra による結び目の多項式不変量

まず，subfactor planar algebra P から次のようにしてテンソル圏 $\mathcal{C}_P$ を構成する．

定義 5

- $\mathcal{C}_P$ の対象は，$P_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ の射影である．
- 射については，2 つの対象 $p \in P_n$, $q \in P_m$ に対して，

$$\mathrm{Hom}\,(p, q) = qP_{n+m}p$$

と定める．

- 2 つの対象 $p \in P_n$, $q \in P_m$ に対して，テンソル積 $p \otimes q$ は P_{n+m} において，p と q を左から順に横に並べた $(n+m)$-box と定める．
- 自明な対象 **1** は，空の 0-box と定める．
- 対象 p の双対 $\bar{p}$ は，p を π 回転したものと定める．

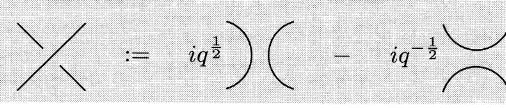
$\mathcal{C}_P$ はこのままでは直和を持たないが，直和の構造を定めることができ，実際，単純な対象の（ユニタリ）同型類は前節の定理 1 における $\mathcal{M}$ によって与えられる[6]．

P が D_{2n} subfactor planar algebra のとき，対象を P_{2k} $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ の射影とした充満部分圏を D_{2n}^{even} と表す．D_{2n}^{even} の単純な対象の（ユニタリ）同型類は

$$\{f^{(0)}, f^{(2)}, \cdots, f^{(2n-2)}, P, Q\}$$

で与えられる．重要なことは，D_{2n}^{even} がリボン圏（実際には，より強く，モジュラー圏となっている）となることである．これにより，枠付き有向絡み目 L に対して，その不変量が得られる[8,9]．ここでは，絡み目 L の捻り数（writhe）$w(L)$ を用いて修正を施した枠組みのない（unframed）絡み目の不変量を考えることにする．以下，この構成方法について具体的に説明する．

定義 6 $TL_2(\delta)$ において，2-box における交差を以下のように定める．



絡み目 L の各成分を $2k$ 重化した絡み目上に，絡み目の向きに沿って Jones-Wenzl 射影 $f^{(2k)}$ を各成分に挿入する（交差の場所は除く）．これを上で定めた交差の分解にしたがって，(subfactor) planar algebra の 0-box としての値を $\delta = q + q^{-1}$ (q, q^{-1} は不定元として扱う）を用いて計算する．その値に $\left(q^{2k(k+1)}\right)^{-w(L)}$ を掛けたものを $\mathcal{J}_{sl(2),(2k)}(L)$ と表す．通常，これは L の **colored Jones 多項式**と呼ばれる絡み目の不変量である．

上と同様にして，Jones-Wenzl 射影の代わりに D_{2n}^{even} の単純な対象 P, Q を用いたものをそれぞれ，$\mathcal{J}_{D_{2n},P}(L)$, $\mathcal{J}_{D_{2n},Q}(L)$ と表す．このとき，次が成り立つ[7]．

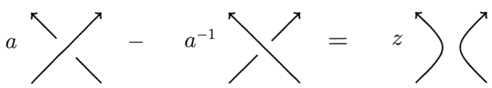
定理 3 K を結び目とするとき，次の等式が成り立つ．

$$\mathcal{J}_{D_{2n},P}(K) = \frac{1}{2}\mathcal{J}_{sl(2),(2n-2)}(K) = \mathcal{J}_{D_{2n},Q}(K)$$

D_{2n} subfactor planar algebra の理論と定理 3 から得られる帰結として，結び目 K に対する多項式不変量である HOMFLYPT 多項式，枠組みのない Kauffman 多項式との関係を述べる．

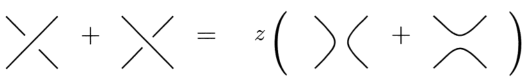
• HOMFLYPT 多項式

次のスケイン関係式で与えられる結び目 K の 2 変数多項式を HOMFLYPT$(K)(a,z)$ と表す．



• Kauffman 多項式

次の関係式で与えられる結び目 K の 2 変数多項式を Kauffman$^{\mathrm{f}}(K)(a,z)$ と表す．





ここで，自明な結び目の値は

$$\frac{a+a^{-1}}{2}-1$$

であることに注意．また，枠組みのない Kauffman 多項式は，$a^{-w(K)}$Kauffman$^{\mathrm{f}}(K)(a,z)$ で与えられる．これを Kauffman$(K)(a,z)$ と表す．

このとき，次の等式が成り立つ[7]．

$$\mathcal{J}_{sl(2),(6)}(K)\Big|_{q=e^{\frac{2\pi i}{28}}} = 2\mathcal{J}_{D_8,P}(K) = 2\ \mathrm{HOMFLYPT}(K)(e^{2\pi i\frac{5}{7}}, e^{-\frac{2\pi i}{14}} - e^{\frac{2\pi i}{14}})$$

$$\mathcal{J}_{sl(2),(8)}(K)\Big|_{q=e^{\frac{2\pi i}{36}}} = 2\mathcal{J}_{D_{10},P}(K) = 2\ \mathrm{Kauffman}(K)(e^{2\pi i\frac{31}{36}}, e^{2\pi i\frac{25}{36}} + e^{2\pi i\frac{11}{36}}) = 2\ \mathrm{Kauffman}(K)(-iq^7, i(q-q^{-1}))\Big|_{q=-e^{\frac{-2\pi i}{18}}}$$

5. おわりに

以上，駆け足ではあったが，作用素環論と低次元トポロジーの最近の話題についての概説を試みた．興味のある読者は文献を頼りにして，subfactor から解き放たれた平面図形の世界を楽しんでほしい．Planar algebra は低次元トポロジーへの応用が期待されるだけでなく，subfactor 理論にも大きな影響を与えそうな勢いである．というのも，これまで未解決であった extended Haagerup subfactor の存在が planar algebra の手法によって確認されたとの報告があるからである．今後の成長が楽しみな分野の 1 つである．

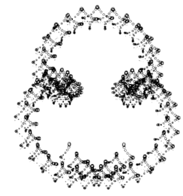
参考文献

1) S. Bigelow, Skein theory for the *ADE* planar algebras, preprint, `arXiv:math.QA/0903.0144v1`.
2) V. Jones, Index for subfactors, *Invent. Math.*, **72** (1983), 1–25.
3) V. Jones, Planar algebras I, preprint, `arXiv:math.QA/9909027`.
4) L. Kauffman, State models and the Jones polynomial, *Topology*, **26** (1987), 395–407.
5) L. Kauffman, An Invariant of regular isotopy, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **318** (1990), 417–471.
6) S. Morrison, E. Peters, N. Snyder, Skein theory for the D_{2n} planar algebras, preprint, `arXiv:math.QA/0808.0764v2`, to appear in Journal of Pure and Applied Algebra.
7) S. Morrison, E. Peters, N. Snyder, Knot polynomial identities and quantum group coincidences, draft.
8) T. Ohtsuki, *Quantum invariants*, Series of Knots and Everything, **29** (2002), World Scientific.
9) N. Yu Reshetikhin, V.G. Turaev, Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups, *Comm. Math. Phys.*, **127** (1990), 1–26.
10) H. Wenzl, On sequences of projections, *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **9** (1987), 5–9.

（さとう・のぶや，立教大学理学部）

ヒーゴールフレアホモロジー

Heegaard Floer homology



丹下 基生

1. はじめに

ヒーゴールフレアホモロジー（Heegaard Floer homology）はオズバス（P. Ozsváth）とサボー（Z. Szabó）によって定義された3次元多様体と結び目を中心とした位相不変量である．この不変量の出現は10年ほど前になるが，その目新しさと強力さから多くの研究者の関心を集め，発展してきた．そしてその可能性は計りしれない．

ヒーゴールフレアホモロジーは多くの位相幾何的対象を含んでおり，その融合には新しい数学が潜んでいる．しかしよく研究されてはいるが，この分野の歴史はいまだ浅く，これから数学を勉強し，論文を書くという院生にはうってつけのテーマにもなるだろう．

この記事ではヒーゴールフレアホモロジーの簡単な定義と，いくつかの応用をピックアップしてヒーゴールフレアホモロジーの概説としたい．文章の中に無定義語や，一般的な事実や定理が断りなしに出てくるところがたくさんある．これらについては最後に挙げる論文群の中から詳細を適宜補って読んでいただけるとよいと思う．

2. ヒーゴールフレアホモロジーの出所

位相的場の理論（TQFT）とは，空間の長さなどとは無関係で，位相形にしかよらない物理量を考える物理学の一理論である．その理論をもとに数学では位相不変量がつくられる．そして物理と数学の間の議論をとばして，そのような位相不変量を数学的に説明すると次のようになる．

n 次元閉多様体上のある位相不変量 I がTQFTに従うとすると，I は次のように計算される．n 次元閉多様体 W をある埋め込まれた $n-1$ 次元超空間 Y で切り，2つの境界つき多様体 W_1, W_2 をつくる．このとき，$I(W)$ の値は Y 上に定義されたある加群 $J(Y)$ 上のペアリング $\langle I(W_1), I(W_2)\rangle_{J(Y)}$ に一致する．ここで $I(W_i)$ は $J(Y)$ 内に実現された境界つき位相不変量となる．

2.1 モノポールゲージ理論

TQFTをもとにつくられた不変量として4次元のSW（サイバーグ・ウィテン [Seiberg-Witten]）不変量がある．SW不変量については詳しく述べないが，ある4次元のモノポール方程式からつくられた微分位相不変量だと思ってもらえるとよい．TQFTに従うと，3次元多様体 Y_i $(i=1,2)$ に対して加群 $SWF(Y_i)$ が定義でき，Y_i の間をコボルディズム（cobordism）でつなぐ任意の4次元多様体 W に対して準同型

$$F_W^{SW} : SWF(Y_1) \to SWF(Y_2)$$

を構成することができる．F_W^{SW} は境界つきSW不変量として $\mathrm{Hom}(SWF(Y_1), SWF(Y_2))$ に実現された．つまり，ある次元にゲージ理論不変量があるとその1次元下に加群を値とする位相不変量が現れるという構図になる．$SWF(Y)$ は**SWフレアホモロジー**といわれている．

2.2 ラグランジュ交叉

シンプレクティック多様体の上にはラグランジュ部分多様体と呼ばれるシンプレクティック幾何学において重要な部分多様体がある．2つのラグランジュ多様体の交点の振舞いを調べることはシンプレクティック幾何学において深い事実をもたらす．中でもフレアによる**ラグランジュ交叉フレアホモロジー**（Lagrangian intersection Floer homology）が有効である．このホモロジーについては次の節でヒーゴールフレアの定義とともに見ることにして，ここでは次の予想を述べる．

予想（アティヤ・フレア［Atiyah-Floer］）一般に，ゲージ理論をもとにつくられたフレアホモロジーとラグランジュ交叉をもとにつくられたフレアホモロジーはある同型

$$FH^{\mathrm{inst}} \cong FH^{\mathrm{symp}}$$

を導く．

オズバスとサボーはこの予想をもとに，SW フレアホモロジーをラグランジュ交叉フレアホモロジーの立場での再構成としてヒーゴールフレアホモロジーを定義したのである．

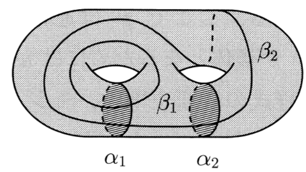
筆者はこれらのことを，2004 年に行われた淡路夢舞台での低次元トポロジーの国際会議でオズバス氏に直接教えていただいた．とても感謝している．

■ 3. ヒーゴールフレアホモロジーの定義 ■

ここで彼らの定義[12)]を行う．SWF が4次元から構成されたのに対して，ヒーゴールフレアホモロジーは2次元から構成されたことが興味深い．

3.1 $\widehat{HF}$ の定義，そして HF^{∞}, $HF^{\pm}$, HF_{red}

任意の有向閉3次元多様体 Y は2つのハンドル体 $V_i (i=1,2)$ の境界同士を貼りつけて得られる．これを Y のヒーゴール分解と呼ぶ．このハンドル体の種数を g とする．また，曲面 ∂V_1 上の g 個の閉曲線で V_1 内で1点につぶれる互いに交わらないものを $\{\alpha_i\}_{i=1}^{g}$ とする．また ∂V_2 上にも同じようにして g 個の閉曲線 $\{\beta_i\}_{i=1}^{g}$ をとる．



それらを上図のように $\partial V_1 =: \Sigma$ 上に描く．

この図を**ヒーゴール図式**という．また基点として $z \in \Sigma - \{\alpha_i\}_{i=1}^{g} - \{\beta_i\}_{i=1}^{g}$ をとっておく．

次に曲面上の g 個の点のペアの空間 $\mathrm{Sym}^g(\Sigma) := \Sigma^g / S_g$ を考える（曲面の対称積）．これは，曲面上の SW 方程式の解のモジュライ空間が曲面の対称積であることに対応している．この空間には Σ 上のシンプレクティック構造から由来する自然なシンプレクティック構造が入ることを注意しておく．

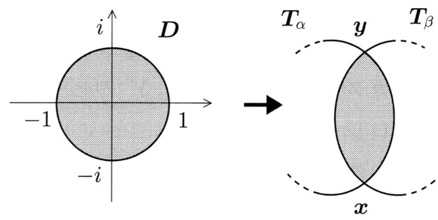
先ほど取った閉曲線 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{g}, \{\beta_i\}_{i=1}^{g}$ は2つの g 次元トーラス $\boldsymbol{T}_\alpha = \alpha_1 \times \alpha_2 \times \cdots \times \alpha_g$ と $\boldsymbol{T}_\beta = \beta_1 \times \beta_2 \times \cdots \times \beta_g$ を $\mathrm{Sym}^g(\Sigma)$ 内に定める．これがオズバスとサボーが考えた2つのラグランジュ部分多様体である．

2つのラグランジュ部分多様体があると，$\boldsymbol{T}_\alpha \cap \boldsymbol{T}_\beta$ を生成元とする複体 $\widehat{CF}(Y)$ を次のようにつくることができる．

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{T}_\alpha \cap \boldsymbol{T}_\beta$ に対して $\boldsymbol{C}$ 上の単位円板 $\boldsymbol{D}$ からの滑らかな写像

$$u : (\boldsymbol{D}, \partial \boldsymbol{D}) \to (\mathrm{Sym}^g(\Sigma), \boldsymbol{T}_\alpha \cup \boldsymbol{T}_\beta)$$

で次の図のような境界条件をもつものを考える．



このような写像のホモトピークラスを $\pi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と書く．円板の像と $\{z\} \times \mathrm{Sym}^{g-1}(\Sigma)$ との代数的交点数を $n_z(\phi)$ とする．$\phi \in \pi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を代表する正則写像で $n_z(\phi) = 0$ を満たすもの全体を $\mathcal{M}_0(\phi)$ とすると，$\mathcal{M}_0(\phi)$ は再び多様体となりその次元は ϕ のマスロフ（Maslov）指数 $\mu(\phi)$ と一致する．$\mu(\phi) = 1$ となるものだけ考えて $\widehat{\partial}$ を

$$\widehat{\partial} \boldsymbol{x} = \sum_{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{T}_\alpha \cap \boldsymbol{T}_\beta} \sum_{\phi \in \pi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \mu(\phi)=1} \# \widehat{\mathcal{M}}_0(\phi) \boldsymbol{y}$$

として定義する．ここで $\#$ は連結成分の数を表す．$\widehat{CF}(Y)$ が複体となるためには u のコーシー・リーマン方程式の横断正則性，モジュライ空間のコンパクト性や向きづけなどが必要となるが，実はこれらは全て適当な意味で満たされており次の定理が成り立つ．

定理　$(\widehat{CF}(Y), \widehat{\partial})$ は複体となり，そのホモロジー $\widehat{HF}(Y)$ は位相不変量である．さらに分解

$$\widehat{HF}(Y) = \bigoplus_{\mathfrak{s}\in \mathrm{Spin}^c(Y)} \widehat{HF}(Y, \mathfrak{s}) \qquad (1)$$

をもち，それぞれ有限生成 $\boldsymbol{Z}$ 加群である．ただし $\mathrm{Spin}^c(Y)$ は Y 上の spin^c 構造全体を表す．

生成元を $(\boldsymbol{T}_\alpha \cap \boldsymbol{T}_\beta) \times \boldsymbol{Z}$ として条件 $n_z(\phi) = 0$ を外すことでいくつかのバリエーション HF^∞, HF^+, HF^-, HF_{red} をつくることができる．それらの詳しい定義は文献 12) を見てもらうことにして結果だけを書いておく．

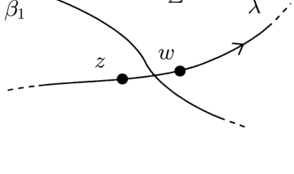
定理　$HF^*(Y)$ $(* = \infty, \pm)$ および $HF_{\mathrm{red}}(Y)$ は Y の位相不変量であり (1) なる分解をもつ．さらにこれらは $\boldsymbol{Z}[U]$ 加群になる．

これらのホモロジー $\widehat{HF}(Y), HF^*(Y)$ $(* = \infty, \pm), HF_{\mathrm{red}}(Y)$ を**ヒーゴールフレアホモロジー**という．

3.2 結び目フレアホモロジー $\widehat{HFK}$ の定義

オズバス・サボー[11]とラスムッセン(Rasmussen)[17]は独立に，3 次元多様体内の向きづけられた（ヌルホモロガスな）結び目 $K \subset Y$ のヒーゴールフレアホモロジーを定義した．

まず Y のヒーゴール分解を次のようにとる．K の管状近傍の境界にあるロンジチュードサイクル（longitude cycle）λ とメリディアンサイクル（meridian cycle）μ がヒーゴール曲面 Σ に埋め込まれているようにとり，$\beta_1 = \mu$ を要請する．また K の向きに従って z, w を下図のようにとる．



次に $\widehat{CF}(Y)$ 上のフィルターづけ

$$\mathcal{F} : \boldsymbol{T}_\alpha \cap \boldsymbol{T}_\beta \to \boldsymbol{Z}$$

を，$\mathcal{F}$ に $0 \in \boldsymbol{Z}$ における対称性を導入し，$\phi \in \pi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に関して

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) - \mathcal{F}(\boldsymbol{y}) = n_z(\phi) - n_w(\phi)$$

を満たすものとして定義する．フィルターづけのレベルごとに $n_z(\phi) = n_w(\phi) = 0$ を満たす正則円板の数を数えることで複体 $(\widehat{CFK}(Y, K, i), \partial_i)$ をつくる．すると次が成立する．

定理　この複体のホモロジー $\widehat{HFK}(Y, K, i)$ は結び目のイソトピー（isotopy）不変量である．これを**結び目フレアホモロジー**という．

4. 定義による計算

ヒーゴールフレアホモロジーの定義に従って $2g$ 次元のシンプレクティック多様体の中の正則円板を数え上げることは容易ではない．そこでオズバスとサボーは $\mathrm{Sym}^g(\Sigma)$ 内の正則円板の数を Σ 内の正則領域の数として捉えた[12]．つまり，

定理　滑らかな写像 $u : \boldsymbol{D} \to \mathrm{Sym}^g(\Sigma)$ はある g 重分岐被覆 $\pi : \widehat{\boldsymbol{D}} \to \boldsymbol{D}$ の持ち上げ（lift）からの写像 $\hat{u} : \widehat{\boldsymbol{D}} \to \Sigma$ と 1 対 1 である．

このアイデアにより定義による計算やホモロジーの位相不変性などが導かれたのである．

5. ヒーゴールフレアホモロジーの応用

次にヒーゴールフレアホモロジーの応用について述べる．

5.1 オイラー数とホモロジーの次数

簡単のためホモロジー球面（$H_1 = 0$）を考えよう．$\widehat{HF}(Y)$ のオイラー数は対称積上の交点の代数的数え上げであるから $\chi(\widehat{HF}(Y)) = |H_1(Y)| = 1$ であることはすぐわかる[13]．次に次数である．ホモロジー球面 Y_1 と Y_2 におけるフレアホモロジーの生成元の間に SW 方程式のモジュライ空間の次元公式をもとにつくられた相対的な次数を定義しておき，$\widehat{HF}(S^3) \cong \boldsymbol{Z}$ の生成元を 0 として定義

することでヒーゴールフレアホモロジー全体に $\boldsymbol{Z}$ 次数を定義することができる[8]．実は有理ホモロジー球面に対しても絶対的な $\boldsymbol{Q}$ 次数を拡張させることができる[8]．その他の場合は高々 $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ 次数のみでオイラー数は定義できる．

また $HF^+(Y)$ の非ねじれ部分の最小次数として $d(Y)$（補正項不変量［correction term］）を定義すると $d(Y)$ は，λ をキャッソン（Casson）不変量として

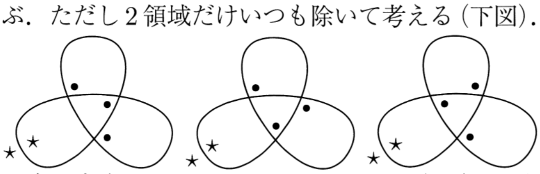
$$\chi(HF_{\mathrm{red}}(Y)) - \frac{1}{2}d(Y) = \lambda(Y)$$

を満たすホモロジーコボルディズム不変量になる[13]．実は，$d(Y)$ を用いてドナルドソンの定理 A（単連結定値 4 次元微分位相多様体の交叉形式は対角的）を系として得ることができる．また $HF^+(Y,\mathfrak{s})$ のオイラー数をとると $\mathfrak{s}$ に対するオイラー構造におけるトゥラエフトージョン（Turaev torsion）になる[13]．これは SW 不変量がトージョン不変量になるというメング・タウベス（Meng-Taubes）の結果を表しているといえる．

$\widehat{HFK}(Y,K,i)$ のオイラー数は結び目 K のアレクサンダー多項式の i 次成分 $a_i(K)$ と一致する[11]．

5.2 $\widehat{HFK}$ とカウフマン（Kauffman）状態

結び目の平面への射影を描き，その各 4 価頂点に対してその周りの 4 つの領域を他と互いに重複しないように指定する．これを**カウフマン状態**と呼ぶ．ただし 2 領域だけいつも除いて考える（下図）．

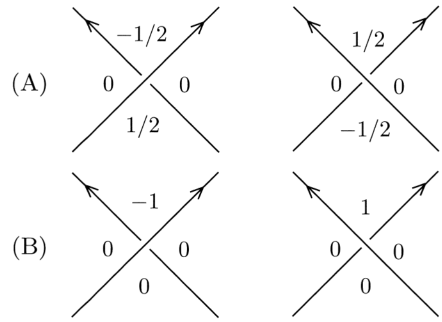


次に交点の上下を加味した結び目の射影図を考え，状態に沿って右段の図 (A) のように割り当てた数を足し上げたものを **S 次数**といい，状態に沿って図 (B) のように割り当てた数を足し上げたものを **M 次数**とすると，これらは 2 つの関数

$$S, M : \{\text{カウフマン状態}\} \to \boldsymbol{Q}$$

を定める．実は次の事実が成り立つ．

定理[9]　カウフマン状態と $\widehat{CFK}$ の生成元とはちょうど対応し S, M 次数は $\mathcal{F}$（フィルターのレベル）と gr（ホモロジーの次数）に一致する．



5.3 組み合わせ的定義

ヒーゴールフレアホモロジーはヒーゴール図式上の交点とその間の円板の数え上げによって計算できる．ただ, 円板の数え上げは正則という解析的な条件で縛られている．位相不変量を解析的議論を経ないで計算する方法があればリーズナブルであるし位相幾何の特徴を捉え易くなるであろう．そのようなモチベーションでマノレスク・オズバス・サーカー（Manolescu-Ozsváth-Sarkar）[6]は $\widehat{HFK}$ を組み合わせ的に定義する方法を開発した．ヒーゴール図式とは無関係に見える結び目の格子 (grid) 図式から $\widehat{HFK}$ を定義したのである．また, サーカー・ワン（Sarkar-Wang）[18]は，ヒーゴール図式を上手く変形してやることで組み合わせ的に $\widehat{HF}(Y)$ を定義する方法を得た．

その他の場合については今のところ本質的には組み合わせ的定義には至っていない．

5.4 τ 不変量

S^3 上にある結び目 K が 4 次元球体 D^4 の表面にあると考える．このとき K を境界とする D^4 内の埋め込まれた曲面の最小種数を**スライス種数** $g_*(K)$ という．一方 $\widehat{CF}(S^3)$ にフィルターづけが誘導する写像 $\widehat{HFK}(S^3,K,m) \to \widehat{HF}(S^3)$ が非自明になる最小の m として $\tau(K)$ を定義する[16]．このとき τ は $g_*(K)$ や結び目解消数 $u(K)$ を

$$|\tau(K)| \leq g_*(K) \leq u(K)$$

のように下から評価することが知られておりトーラス結び目の g_* などの決定（ミルナー［Milnor］予想の証明）ができる．また結び目コンコーダンス（concordance）群からの準同型を導くこともでき，結び目コンコーダンス群に対して多くの貢献がある．

5.5 接触構造

多様体上に至るところ非可積分な平面場 ξ を**接触構造**という．接触構造がどれほどあるか，またそれらはどのような性質をもつかを調べることはごく自然なことである．一方，ヒーゴールフレアホモロジーの生成元は多様体上のある“場”を捉えたものだと考えることができる．接触場もその1つで，3次元多様体上の接触平面場に対する生成元を与えることで接触構造不変量

$$c(\xi) \in \widehat{HF}(-Y, \bar{\mathfrak{t}}(\xi))$$

を定義することができる[15]．$\bar{\mathfrak{t}}(\xi)$ は ξ から誘導される $-Y$ 上の自然な spin^c 構造を表す．この不変量の非自明性は，接触構造の基本的な性質である**タイト**(tight)**性**を意味する．応用として4次元シンプレクティック多様体の境界になっていないタイト接触構造を多く見つけることができた．これは3次元接触トポロジーにおいて革命的な進歩といえる．それに現在ではこの不変量を求める組み合わせ的方法も開発されており計算しやすくなっている．

しかし上の主張の逆（タイトならば c は非自明）は一般には成立しないし，この不変量で捉えられない接触トポロジーも多く存在する．

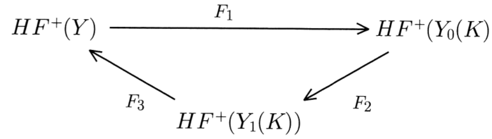
5.6 種数の検出

$$\max\{i \mid \widehat{HFK}(K, i) \neq 0\}$$

は結び目 K の**ザイフェルト**(Seifert)**種数** $g(K)$（その結び目を境界とする埋め込まれた曲面の最小種数）に等しい[10]．この事実はガバイ(Gabai)やエリアシュベルグ・サーストン(Eliashberg-Thurston)らの仕事に支えられている．さらに HF^+ は**サーストンノルム**さえ検出し，葉層構造と深いつながりをもつ．例えば L 空間 $(\mathrm{rank}(\widehat{HF}(Y)) = |H_1(Y)|$ を満たす有理ホモロジー球面）ならばトート葉層が存在しない．

5.7 デーン手術

ヒーゴールフレアホモロジーとデーン手術の関係は特に重要でありフレアホモロジーの特性を生かした絶好の応用といえる．結び目 $K \subset Y$ の管状近傍を引き抜き，メリディアン方向に p 回ねじって貼りなおす操作を p デーン手術と呼び，Y_p と書くことにする．すると対称積の中の3つのラグランジュ部分多様体の間に存在する正則三角形を数え上げることで，Y, Y_0, Y_1 の間に，次の**手術完全系列**[13]が証明される．



しかも $F_i \quad (i = 1, 2, 3)$ は前述のTQFTから従う写像でもある．ほかにもロンジチュード方向にもひねる $1/q$ 手術など様々な完全系列[13]が知られている．この完全三角形から，オイラー数や次数のずれなど計算することでキャッソン不変量の手術公式を直ちに導くこともできる．

オズバス・サボーらはレンズ空間手術というテーマで，次のような著しい結果も残している．

> **定理**[14]　結び目 $K \subset S^3$ の整数手術によってレンズ空間を生成したとする．このとき K のアレクサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ は次の形になる．
>
> $$\Delta_K(t) = (-1)^m + \sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j}(t^{n_j} + t^{-n_j})$$
>
> ただし n_j は $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_m$ を満たす自然数である．

この定理はレンズ空間を任意の L 空間に置き換えても成り立つ．ほかにもザイフェルト空間手術における制限やコスメティック手術予想の解決などがある．

デーン手術とフレアホモロジーとの関係は以前からある．一般に n 個のラグランジュ部分多様体の間の正則 n 角形の数え，フレア（コ）ホモロジーの高次積を考えることでラグランジュ多様体の深い情報を得ることができる $\mathcal{A}_\infty$ 圏という概念がある[1]．このような構造を用いてヒーゴールフレアホモロジーをTQFT化する試みもされている[5]．

5.8 *SFH* と葉層–接触構造不変量

ガバイが創始した**縫い目つき**(sutured)**多様体** (Y, γ) とは境界 ∂Y に縫い目(suture)にあたる曲線 γ が指定された多様体のことである．ユーハス(Juhasz)はこの多様体の構造から**縫い目つきヒーゴールフレアホモロジー** $SFH(Y, \gamma)$ を定義した[4]．これは境界つきヒーゴールフレアホモロ

ジーの一種で HF^+ と $\widehat{HFK}$ を両方拡張したものにもなっている．さらにガバイによる曲面分解

$$(Y_1,\gamma_1) \stackrel{S}{\rightsquigarrow} (Y_2,\gamma_2)$$

に対してある部分群

$$SFH(Y_1,\gamma_1) > SFH(Y_2,\gamma_2)$$

が対応する．これを利用して，ファイバー性の検出

$$\widehat{HFK}(S^3,K,g(K)) \cong \boldsymbol{Z}$$

$$\Leftrightarrow K \text{ はファイバー結び目}$$

や，ある深さをもつ葉層の存在定理などに貢献がある．しかしユーハスの前に $\widehat{HFK}(S^3,K,g(K))$ から結び目のファイバー性の検出に成功したのはニィ（Ni）[7]であった．

一方 γ を接触幾何における分割曲線とみなせば，境界つき 3 次元多様体上の接触構造不変量 $c(\xi,\gamma) \in SFH(-Y,-\gamma)$ も定義できる[2]．さらに接触構造を圏論的に考察することで SFH を TQFT として扱う研究も積極的にされている[3]．

ここで紹介した以外にも多くの応用がある．ルジャンドル（または横断的）結び目の不変量，平面的開本分解，2 重分岐被覆のフレアホモロジーとホバノフ（Khovanov）不変量，4 次元の混合不変量などである．

■ 6. 基本群との関係 ■

基本群は 3 次元多様体を分類するほど強力な不変量であり，フレアホモロジーとの関係を期待したい．元来ホモロジー理論では基本群などの非可換性を扱うのは困難である．しかし，今のところサーストンノルムの検出やトート葉層の判定など関係性は上澄みのみであり発展途上のテーマである．

■ 7. 最後に ■

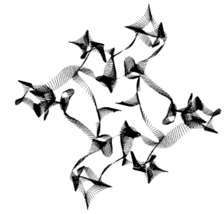
ヒーゴールフレアホモロジーは登場から今日まで短い間に盛んに研究が進み，これからの低次元トポロジーの研究ではなくてはならない存在になりつつある．幸い，組み合わせ的な定義などの開発も進み，易しくなってきている．この記事を読んで，一人でも多くヒーゴールフレアホモロジーの研究に参入されることを筆者は望んで止まない．

参考文献

1) K. Fukaya, and P. Seidel, Floer homology, A_∞-categories and topological field theory, Geometry and physics (Aarhus, 1995), 9–32.
2) K. Honda, W.H. Kazez, and G. Matic, The contact invariant in sutured Floer homology, arXiv:0705.2828.
3) K. Honda, W.H. Kazez, and G. Matic, Contact structures, sutured Floer homology and TQFT, arXiv:0807.2431.
4) A. Juhasz, Holomorphic discs and sutured manifolds, *Algebr. Geom. Topol.*, **6** (2006), 1429–1457.
5) R. Lipshitz, P. Ozsvath, and D. Thurston, Bordered Heegaard Floer homology: Invariance and pairing, arXiv:0810.0687.
6) C. Manolescu, P. Ozsvath, and S. Sarkar, A combinatorial description of knot Floer homology, *Ann. of Math.*, (2) **169** (2009), no.2, 633–660.
7) Y. Ni, Knot Floer homology detects fibred knots. *Invent. Math.*, **170** (2007), no.3, 577–608.
8) P. Ozsváth, and Z. Szabó, Absolutely graded Floer homologies and intersection forms for four-manifolds with boundary, *Adv. Math.*, **173** (2003), no.2, 179–261.
9) P. Ozsváth, and Z. Szabó, Heegaard Floer homology and alternating knots, *Geom. Topol.*, **7** (2003), 225–254.
10) P. Ozsváth, and Z. Szabó, Holomorphic disks and genus bounds, *Geom. Topol.*, **8** (2004), 311–334.
11) P. Ozsváth, and Z. Szabó, Holomorphic disks and knot invariants, *Adv. Math.*, **186** (2004), no.1, 58–116.
12) P. Ozsváth, and Z. Szabó, Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds, *Ann. of Math.*, (2) **159** (2004), no.3, 1027–1158.
13) P. Ozsváth, and Z. Szabó, Holomorphic disks and three-manifold invariants: properties and applications. *Ann. of Math.*, (2) **159** (2004), no.3, 1159–1245.
14) P. Ozsváth, and Z. Szabó, On knot Floer homology and lens space surgeries, *Topology*, **44** (2005), no.6, 1281–1300.
15) P. Ozsváth, and Z. Szabó, Heegaard Floer homology and contact structures, *Duke Math. J.*, **129** (2005), no.1, 39–61.
16) P. Ozsváth, and Z. Szabó, Knot Floer homology and the four-ball genus, *Geom. Topol.*, **7** (2003), 615–639.
17) J. Rasmussen, Floer homology and knot complements, arXiv:math/0306378.
18) S. Sarkar and J. Wang, An algorithm for computing some Heegaard Floer homologies, arXiv: math/0607777 to appear in Ann. of Math.

（たんげ・もとお，京都大学数理解析研究所）

計算機科学と結び目不変量



長谷川　真人

いたずらに複雑に書かれ判読困難になってしまったプログラムは，しばしばスパゲティに例えられる．でも，絡み目のようだとか結び目のようだとか言う人は，(まだ）あまりいないようだ．

スパゲティ・コードは，狭義にはジャンプ命令などの濫用により制御の流れを把握することが難しくなってしまったプログラムを指すが，ジャンプ命令を用いない（いわゆる構造化された）プログラミングにおいても，いくらでも入り組んだプログラムが書けてしまう．我々プログラミング言語の研究者は，言ってみればそれらの（広義の）スパゲティの発生をなるべく必要最小限に抑え，また生じたスパゲティを可能な限りときほぐす方法を，日々捜し求めているのである．

さて，「スパゲティ」を「結び目」に置き換えてみれば，プログラミング言語の研究も，結び目の研究も，案外似てないこともない，というのが本稿の主張である．以下では，プログラムと結び目の対比が単なる比喩にとどまらず，実際に共通する構造の特定に至った例を紹介する．プログラミング言語の側の主役は**再帰プログラム**，すなわち自己言及的なプログラムである．

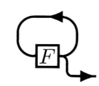
整数を入力に取り整数を出力する簡単なプログラム

$$\mathsf{sum}(x) \;\equiv\; \text{if } x=0 \text{ then } 0 \text{ else } x+\mathsf{sum}(x-1)$$

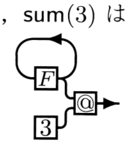
を考えよう．注意すべきは，これが，プログラムの定義（≡ の右辺）で自身（sum）を呼び出す再帰プログラムになっているということである．例えば，sum(3) の実行は，$3 \neq 0$ なので $3+\mathsf{sum}(2)$ と sum 自身を呼び出し，以下同様に続けて $3+(2+(1+\mathsf{sum}(0)))$ に到達し，$\mathsf{sum}(0)=0$ なので和 $3+(2+(1+0))$ を計算して 6 を答えとして返す．sum のような再帰プログラムは，その実行が常に停止するとは限らないので，整数上の部分関数を定めていると見なせる．sum の定める部分関数は，部分関数全体の上の（汎）関数

$$F(f)(x) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ x+f(x-1) & (x\neq 0 \text{ かつ } f(x-1) \text{ が} \\ & \text{定義されている場合}) \\ \text{未定義} & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

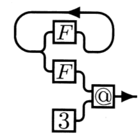
の不動点として理解できるが[4]，ここは，もっと視覚的に説明することもできる．まず，汎関数 F に対応するプログラムを，─[F]► で表現する．そして sum を巡回的なグラフ



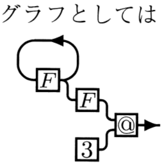
で表現する．すると，sum(3) は



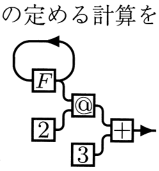
となる．(@ はプログラムに入力を渡すことを表す印である．) F を枝分かれで複製すると



となるが，これはグラフとしては

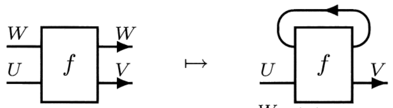


と同じである．F の定める計算を行うと，



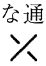
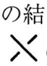
となる．以下再帰呼び出しが起こる度に F の部分を複製し使用するというプロセスを繰り返す．

このように図示してみると，再帰プログラムは結び目に結構似ている，と思えないだろうか．実は，再帰プログラムの数学的なモデルは，結び目の不変量と密接に関連した圏論的な構造を用いて与えられることがわかっている．それは，**トレース付きモノイダル圏**[5] という，形式的なテンソル積とトレースを備えた圏である．ここでいうトレースは，線形代数でおなじみの行列の対角和を一般化したもので，$U\otimes W$ から $V\otimes W$ への射を U から V への射に写す適切な条件を満たす演算であり，プログラミングの感覚で言うなら，出力の W を入力の W につなぐ操作である（下図）．



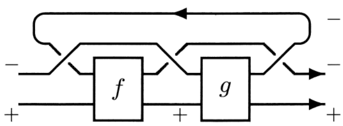
$f: U\otimes W \to V\otimes W$ $\quad$ $Tr^{W}_{U,V}(f): U \to V$

トレース付きモノイダル圏は，リボン圏[6]のテンソル積について閉じた充満部分圏としても特徴づけることができる[5]．例えば有限次元線形空間と線形写像の圏，また量子不変量に関係の深いところでは量子群の表現の圏などはリボン圏であり，したがってトレース付きモノイダル圏の例になっている．その一方，プログラミング言語の理論で用いられる，再帰プログラムを不動点として解釈するための構造を持っている圏もみなトレース付きモノイダル圏であり．そこではトレースは不動点から自然に構成される[3,4]．この不動点とトレースとの対応が，再帰プログラムの図と結び目とが似ていることに数学的な裏付けを与えている．

結び目の理論と比べ再帰プログラムの理論が大きく異なるのは，枝分かれでの複製のような通常の結び目では考えない操作も扱うことと，交点  と  の違いを（あまり）気にしないことくらいである．研究対象が共通の構造を持つばかりでなく，研究の方法にしても，プログラミング言語の理論は，結び目の不変量ならぬ計算の不変量を問題にしているわけで，いわば結び目の理論の親戚みたいなものなのである．

量子不変量の研究の発展により結び目の理論は大きく変貌してきたわけだが，その影響は遠く計算機科学にも及びつつある，と言ってよいかも知れない．現時点では，交点の正負を気にしないなど，量子論への移行の計算機科学の側における意義は必ずしも明確にはなっていないが，筆者はわりと楽観的に，近い将来「計算の量子不変量」と呼ぶにふさわしいものが登場するものと期待している．

関連する話題に，トレース付きモノイダル圏を用いて，相互作用，つまり双方向の情報の流れを伴う計算のモデルを構築する**相互作用の幾何**がある[1,2]．「上り」と「下り」の情報流が共存する状況は，トレースを使ってうまく表現できるのである．下図は相互作用の合成を表している．左から右への素直な流れ（+）がある一方，トレースを用いて右から左へと逆順に合成される流れ（−）もあることがおわかりいただけるだろうか．



実は，トレース付きモノイダル圏からリボン圏を作り出す Int 構成と呼ばれるうまい方法があり[5]，相互作用の幾何は，Int 構成に基づいた計算モデルの理論と言ってよい．上の相互作用の合成も，Int 構成によって得られたリボン圏での射の合成に他ならない．

筆者も，プログラムをデータとみなしてやりとりする（プログラミング言語の言葉では「高階」の）相互作用の幾何の研究に着手している．要するに高階の双方向のスパゲティであるが，これがうまくときほぐせるかどうか，量子不変量の研究の隆盛を横目に，目下あれこれ思案しているところである．

参考文献

1) S. Abramsky, E. Haghverdi, P.J. Scott: Geometry of Interaction and linear combinatory algebras. *Math. Struct. Comp. Sci.* **12**(5), 625–665 (2002).

2) J.-Y. Girard: Geometry of Interaction I: interpretation of system F. In *Proc. Logic Colloquium '88*, pp.221–260 (1989).

3) M. Hasegawa: *Models of Sharing Graphs: A Categorical Semantics of* let *and* letrec. Springer (1999).

4) 長谷川真人：再帰プログラムの意味論について，数学 **59**, 180–191 (2007).

5) A. Joyal, R. Street, D. Verity: Traced monoidal categories. *Math. Proc. Cam. Phil. Soc.* **119**, 447–468 (1996).

6) D.N. Yetter: *Functorial Knot Theory.* World Scientific (2001).

（はせがわ・まさひと，京都大学数理解析研究所）

名著に親しむ

——特集から広がる読書案内——

高田　敏恵

量子不変量をめぐって

私が量子不変量に出会ったのは，Jones 多項式が発見され，V.G. Drinfel'd，神保道夫により量子群が発見されて間もない頃であった．また，N. Reshethikhin と V.G. Turaev が，量子群の表現を利用することにより，経路積分を用いた Witten 不変量の数学的な定義を与えた．まさに，量子不変量時代幕開けのときである．リー環，ホップ代数，表現論の知識のない私が，最初に読んだ論文が量子不変量に関する論文であった．今考えると無謀とも思えるが，とにかく，無我夢中で勉強した．知識不足の私にとって，量子群の発見者である神保道夫による『量子群とヤン・バクスター方程式』は救世主のような本であった．

量子不変量は，場の量子論と深い関わりがある．その関わりを，わかりやすく解説しているのが，河野俊丈による『場の理論とトポロジー』である．この本によって，講演や論文から得たものの頭の中で分散していた知識を整理することができた．また，共形場理論から，量子不変量を眺めることにより，量子不変量の理解を深めてくれた本でもある．

1990 年代から，日本語で書かれた結び目や 3 次元多様体の入門書が出版されるようになり，学部生にとっても，取り組みやすい分野になった．しかし，量子群の表現論には抵抗を感じる学生が多かったようである．特に，3 次元多様体の量子不変量の定義では，パラメータ q が 1 の巾根の場合を考える必要があり，量子群の表現論はさらに難しくなる．そんな中，見かけ上は量子群が現れない，スケイン理論を使った 3 次元多様体の量子不変量の再定義が W.B.R. Lickorish によって与えられた．スケイン理論では，結び目やタングルの「図」の漸化式によって計算がなされ，計算のアルゴリズムを理解するのは容易である．「図」の漸化式を使って計算される Jones 多項式を組み合わせることにより，3 次元多様体の量子不変量の再定義が得られる．Lickorish 著『An Introduction to Knot Theory』において，その仕組みがわかりやすく解説されている．

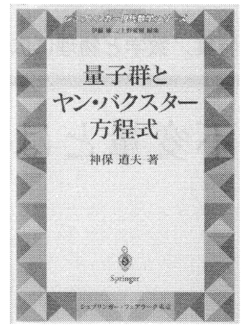
量子不変量は，半単純リー環の表現を与えるごとに定義されるので，結び目，3 次元多様体の不変量が大量に構成されたことになる．これらを統一する概念が生まれた．結び目の量子不変量について，性質を特徴付ける Vassiliev 不変量，量子不変量に対して普遍的である Kontsevich 不変量の登場である．3 次元多様体の量子不変量について，Vassiliev 不変量に対応する有限型不変量の概念が大槻知忠によって導入され，Kontsevich 不変量に対応する LMO 不変量が大槻，T.T.Q. Le，村上順によって定義された．さらに，葉廣和夫によってクラスパー理論が構築され，新しい概念が次々と出される中，それらを網羅する本『Quantum invariants』が大槻によって出された．要領よく解説が行われ，量子不変量入門者にとって，非常に理解しやすい本となっている．私自身，この本から得るものが多くあり，現在，私にとってバイブル的な本である．

90 年代の終わりに出された「体積予想」によって，量子不変量は新たな展開を見せる．N 次元表現に付随した結び目の量子不変量において，そのパラメータ q を 1 の N 乗根にすると量子不変量は「0」になってしまう．そのため，そのような場合はこれまでほとんど研究されることはなかったが，「0」になる要因をうまく取り除くと，そこから「双曲結び目の捕空間の体積」が出てくるという予想である．また，量子不変量の式からは，双曲結び目の補空間の単体分割が見えてくる．組合せ的に定義された量から，結び目の幾何学的情報が得られるのである．これを期に，双曲結び目の量子不変量と結び目の双曲構造との関係の研究が盛んに行われるようになった．3 次元多様体の量子不変量についても，これまで排除していた量子群の表現を利用すると，3 次元多様体の幾何が現れることが予期される．これまで，捨ててしまっていたところに，実は，面白いことが潜んでいたのである．

量子不変量発見から，約 20 年がたつが，量子不変量は未だ謎が多い不変量である．量子不変量は，結び目の四面体分割や，保型性など，研究目的によって，異なる顔を見せてくれる．最近は葉廣による量子不変量の新しい展開式によって，また別の顔を見せてくれた．弦理論，数論など他分野と量子不変量との関連も徐々にわかってきている．次はどんな顔を見せてくれるのだろうか？

（たかた・としえ，新潟大学理学部）

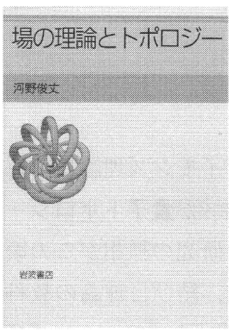
量子群とヤン・バクスター方程式



神保道夫著，シュプリンガー・ジャパン，135 頁，1990 年

この本で取り上げられているのは，主として，一番簡単なリー環 sl_2 に対応する量子群であるが，他のリー環の場合においても，基本となる重要なものである．リー環，ホップ代数など量子群の表現の理解に必要な事柄がほぼ証明つきでわかりやすく書かれている．各章末には理解を確かめるための適切な問題もあり，入門者にお薦めの本である．

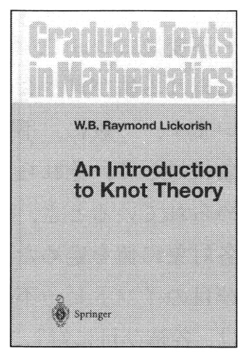
場の理論とトポロジー



河野俊丈著，岩波書店，164 頁，2008 年（元は岩波講座 現代数学の展開の一冊，1998 年）

結び目や 3 次元多様体の量子不変量は，場の理論と深い関わりがある．共形場理論の幾何学的側面，そこから結び目や 3 次元多様体の位相不変量が得られる仕組みが丁寧に書かれている．数理物理学専門の人にとっても，低次元トポロジー専門の人にとっても，他方の理論を学ぶために好適な本である．同じ著者による『反復積分の幾何学』（シュプリンガー・ジャパン）も読むとより理解が深まるだろう．

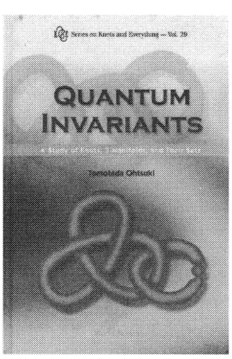
An Introduction to Knot Theory



W.B.R. Lickorish 著，GTM 175, Springer, 220 頁，1997 年

結び目についての基本的事項のみならず，位相幾何学の研究において欠かせない基本群，ホモロジー群論，被覆空間の応用もあり，それらの演習書としても良書である．また，スケイン理論を利用した 3 次元多様体の量子不変量の構成法，計算法の詳しい解説がある．スケイン理論により得られる絡み目の多項式不変量の情報も多く含まれている．なお，訳本『結び目理論概説』（シュプリンガー・ジャパン）もある．

Quantum Invariants, A Study of Knots, 3-Manifolds, and Their Sets



T. Ohtsuki 著，Series on Knots and Everything Vol.29, World Scientific, 508 頁，2001 年

量子不変量の研究に大きな成果をあげた著者による量子不変量の教科書である．丁寧な証明が与えられ，入門者にはとってありがたい．著者のパワーが伝わってくる本でもある．量子群から，量子不変量が得られる仕組がわかりやすく述べられている．さらに，有限型不変量，Kontsevich 不変量，LMO 不変量，クラスパー理論の解説もあり，専門家にとっても，内容豊富な本である．

特集／数学と物理に広がる不変量

不変量とは何か

大槻　知忠（質問：編集部）

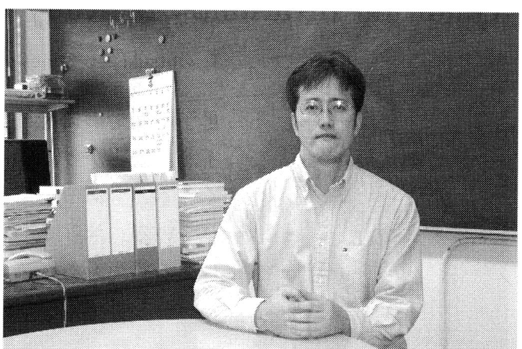
1. 不変量とは何か――その過去・現在・未来

――今回の特集テーマである“不変量”とは一体どういうものなのか，また歴史的にはどのように発展してきたのか，他分野の方や学部生にもなるべくわかるようにお教えいただけますでしょうか．

不変量について，本特集では主に量子トポロジーに現れる結び目や3次元多様体の不変量を考えています．一般に，不変量とは，不変量を考える対象に対して，それらを互いに関連させる操作が定められているとき，その操作で不変になるように各対象に値を定めたもののことです．例えば，結び目のイソトピー不変量であるジョーンズ多項式は，各結び目に対して多項式を定めていて，2つの結び目が変形してうつりあうとき（すなわち，イソトピックであるとき）それらに対して定められている多項式が等しくなっています．トポロジーでは変形してうつりあう結び目を「同じ」結び目とみなしますが，与えられた結び目が同じかどうか判定したいときに，結び目の不変量が使われます．

トポロジーでは，古典的には，位相空間の不変量としてホモロジー群や基本群が知られていました．1980年代に低次元トポロジーに数理物理的手法が導入されたことにより，低次元トポロジーにおける不変量の研究の様相は劇的に変ります．巻頭言にも書きましたように，結び目や3次元多様体の量子不変量やチャーン・サイモンズ理論に関連する不変量を研究する研究領域が**量子トポロジー**と呼ばれています．不変量の研究の様相がこの頃に劇的に変ったので，例えば，結び目理論の教科書でも「ジョーンズ多項式以前」と「ジョーンズ多項式以降」で教科書の内容が大きく変っていて，教科書を選ぶときには注意が必要です．量子トポロジーは，数理物理，統計物理，量子群，作用素環などの周辺分野と交流しながら発展してきました．本特集の解説記事は主に量子トポロジーや周辺分野のトピックからなっています．

本特集ではあまりとりあげていませんが，トポロジーに数理物理的手法が導入されたことによって誕生したもう1つの大きい新研究領域は**ゲージ理論**です．ゲージ理論では，ヤン・ミルズ汎関数をラグランジアンとする4次元多様体上の場の理論を



大槻知忠氏．

考え，不変量としては4次元多様体のドナルドソン不変量やその境界の3次元多様体のフレアーホモロジーが現れます．インスタントンのモジュライ空間など無限次元空間を無限次元の群（ゲージ群）でわってできる空間や非線型偏微分方程式の難解で長大な解析が研究のメインになることがしばしばあり，研究内容は4次元多様体論というよりは非線型偏微分方程式や無限次元空間の幾何学という側面が大きいとおもいます．その後，内容的にはサイバーグ・ウィッテン理論に進展しています．

その他，微分幾何では（例えば）微分幾何的な観点から定義される多様体の微分位相不変量である山辺不変量（「多様体の曲率」のような量）について研究されていますし，代数幾何では（例えば）代数多様体の双有理変換で不変な量である双有理不変量について研究されています．それぞれの幾何学やそれぞれの目的に応じてたくさんの不変量があります．

2. 国内外の研究状況

——不変量に関する国内での研究状況，また海外との比較などについてお聞かせいただけますでしょうか．

量子トポロジーにでてくる結び目や3次元多様体の不変量は，日本では，結び目理論や低次元トポロジーのコミュニティの中で研究されていることが多いようにおもいます．日本では海外に比べて低次元トポロジーの研究者の層が厚いように私はおもうのですが，結び目や3次元多様体の不変量を研究するときも低次元トポロジーの従来の研究と関連する形で研究されることが多いようにおもいます．例えば，その不変量を使ってどの結び目とどの結び目が区別できるとかできないとか，従来の低次元トポロジーとの関わりが大事にされているようにおもいます．

一方，海外では，量子トポロジーの不変量の研究は数理物理などの背景と関連した理論的な側面が重視されているようにおもいます．例えば，ヨーロッパ方面でQuantum Topologyというジャーナルがもうすぐ発刊される予定ですし，「量子トポロジー」という研究領域が研究者のコミュニティに認知されているように感じます．

もっとも，そういう違いは，コミュニティの全体をみたときの傾向の印象であって，個々の研究者のレベルでいうと，日本と西ヨーロッパと北アメリカに量子トポロジーの主要な研究者の多くがいて，常に互いに交流しているので，日本だからとか海外だからという違いは個人レベルではあまり感じません．私の世代は，ウィッテンやジョーンズがフィールズ賞を受賞したとき（1990年）に大学院生であった世代なのですが，国内外の量子トポロジーの研究者にはその世代の研究者がたくさんいます．サーストンがフィールズ賞を受賞したとき（1982年）に大学院生であった世代には幾何構造が専門の先生方が何人もおられることを考えると，分野の発展には流行というものの影響も大きいのかもしれません．

3. 将来像——これからの進展

——不変量の研究に今後期待されることや未解決問題への取組みなど，これからの展望をお聞かせいただけますでしょうか．

量子トポロジーの不変量に関する大きい未解決問題は**体積予想**です（村上順氏の記事を参照）．複素化された体積予想は，結び目の色つきジョーンズ多項式のある種の極限についてその極限の複素数の実部に双曲体積，虚部にチャーン・サイモンズ不変量が現れることを主張します．双曲体積には「グロモフの単体体積」という位相幾何的な再定義があって，必ずしも双曲的とは限らない3次元多様体に対しても定義されますが，その相方のチャーン・サイモンズ不変量は現時点では双曲構造を経由する定義しか知られていません．体積予想は，チャーン・サイモンズ不変量にも位相幾何的な定式化があるのではないか，ということを示

唆しています．また，体積予想の漸近展開の高次の項の考察は最新の話題ですが，数論との類似性との観点から，多重チャーン・サイモンズ不変量との関連が期待されます．

多項式不変量の**圏化**（categorification）も現在発展中の大きい話題です．ジョーンズ多項式の圏化としてホバノフホモロジーが構成されて以来，さまざまな多項式不変量の圏化を構成すること（その多項式不変量をオイラー数としてもつようなホモロジー群を結び目不変量として構成すること）が試みられています．ゲージ理論に現れるフレアーホモロジーがキャッソン不変量の圏化であることと，キャッソン不変量は量子不変量の数論的漸近展開の初項に現れることをふまえると，3 次元多様体の量子不変量の圏化を構成するという問題は，チャーン・サイモンズ理論の枠組みを越える問題であるとおもわれ，興味深い問題です．これと関連して，量子群の可積分加群の圏化の研究が進展中です（有木進氏の記事を参照）．

その他の未解決問題について「未解決問題集」[1]もご参照ください．

4. 求められること

——不変量の研究に求められるスキル・知識，キーパーソン・キーワード，理論などについてお聞かせいただけますでしょうか．とくに学部生がこの方面の研究に入っていくには何が必要かなどもお教えいただけると幸いです．

量子トポロジーに関しては，これを勉強するのに最低限必要な知識は位相幾何の基礎（多様体，ホモロジー群，基本群など）です．さらに，ベクトル束，リー環とその表現論，量子群，作用素環などについても知っていると役に立ちます．量子トポロジーの研究は周辺分野のトピックと関連して研究されることが多いですが，個々の研究にすべての周辺分野が必要になるわけではないので，周辺分野のどれかについて深く知っていると有利です．

キーワードは，結び目の不変量については，ジョーンズ多項式，アレクサンダー多項式，組みひも群，量子群，KZ 方程式，量子不変量，コンセビッチ不変量，バシリエフ不変量などで，3 次元多様体の不変量については，量子不変量，トゥラエフ・ヴィロ不変量，摂動的不変量，LMO 不変量，有限型不変量，キャッソン不変量などです．また，数理物理的背景についてはチャーン・サイモンズ理論，共形場理論などで，最近の話題については体積予想，ホバノフホモロジーなどがキーワードです．

5. 影響を受けたこと

——先生ご自身が研究者になるにあたって影響を受けたことやきっかけをお聞かせいただけますでしょうか．

私は大学の学部生のころ，同級生の仲間たちと自主ゼミをたくさんやっていたのですが，その自主ゼミが自分の研究者としての基礎になっているようにおもいます．ゼミは，その日の当番の人がテキストの内容を発表して他の参加者が質問をするという形で進められるのですが，とくに発表者は「論理的なギャップがまったくない状態でテキストの内容を完全に理解していて，どこをたたかれても完全に答えることができる」という状態であることが重要です．もっとも実際には，発表者はすべての質問にすらすらと答えられるわけでもなく，発表が行き詰まるたびにメンバーみんなでうんうんと考え込む，ということになります．当時は若くて時間も体力もたくさんあったので，もぐらたたきのもぐらのように次々に現れる疑問点に一切妥協することなく，延々とみんなで考え続けていつも（午後から始めて）夜中まで自主ゼミを続けていました．例えば「テキストに書かれていることを 1 行 1 行完全に理解しながら読む」，「自分には何がわかっていて何がわかっていないのか明確に区別する」，「土台から始めて自分で全体を完全に再構築してみる」といったことは，研究者としては基本

中の基本で，プロの研究者は自分１人でもそういう作業は当然できなければなりませんし，そういう作業を通して勉強中の数学の内容をお腹の底から正しいとおもえるようになるわけです．しかし，もし学部生が最初からそういう作業を自分１人で延々とやったとしたらそれは現実にはなかなかつらいものがあるとおもわれますし，今からおもうと，仲間といっしょにやったからこそ，私はそういうスタイルの勉強を何年も続けることができたのだとおもいます．私が自主ゼミで学んだのは「真剣に数学に向き合うこと」だったのだとおもいます．

プロの研究者になってあらためて考えてみると，「数学の内容について細部まで完全につき詰めて考える」というのは学生さんたちにとってなかなかハードルの高い課題のようです．社会一般からみると並外れたレベルの数学の完成度をゼミでは要求されるので，なぜそこまでやらないといけないのかというモチベーションを保ちにくいのかもしれません．実際，私自身の場合は研究意欲のモチベーションを保ちたいとき，数学以外の世界の「並外れた情熱をもつ人」が参考になります．私のホームページ（http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tomotada/）でいくつかの本についてコメントしていますが，世の中で抜きん出た仕事をしようとおもうといずれにせよ並外れた情熱が必要なのであって，そういう生き方について知ることがモチベーションを保つ参考になるようにおもいます．

6. 伝えたいメッセージ

——学生や後進の人たちに何か伝えたいメッセージがございましたらお願い致します．

研究者にとって一番大切なことは「真剣に学問に向き合うこと」だとおもいます．とくに若いときは時間も体力もたくさんあるわけですから，「細部まで完全につき詰めて考える」という作業を地道にしっかりとやってほしいとおもいます．研究者としてそれは「基礎体力」に相当する重要な部分であって，そういう作業で妥協したりごまかしたりする人は研究者として伸びることはできません．

それから，「コミュニケーション能力」について，仲間たちと相互理解できる形で学問的な議論が行える力を鍛えてほしいとおもいます．ひとりよがりな理解で自分だけが面白いとおもうのではなく，その面白さを説得力をもって仲間に伝えて共感しあうことができる，ということが大切です．その際も，ひとりよがりな伝え方ではなく，相手をよく見て相手が必要としている情報は何であるのかをよく考え，それをふまえて相手に説明するようにしましょう．また，数学の研究は必ずしも１人でやるものではなく，研究者のコミュニティで共有されている価値観というものがあります．「どういう問題が面白くて，どういう問題が面白くないのか」といった価値観を他の研究者と共有できるように，学内外（や国内外）のセミナーや研究集会に参加して多くの研究者と議論することが大切です．

若い人には，受験数学の延長で，数学の研究は「（未解決の）問題を解くこと」とおもっている人も多いかもしれませんが，数学者にとって数学の研究はそれだけではありません．数学は数学的な現象を記述する言葉です．例えば，結び目の不変量はその結び目がどのような個性をもった結び目なのかを記述する言葉である，ということです．数学者は，未知の数学的現象を発見し，それを記述するための言葉をつくることをめざしています．言葉をつくることで，その数学的現象の理解がさらに深まり，その先にさらなる未知の世界が広がっているのが見えてきます．そのような発見的で創造的な数学の研究に多くの若い人がチャレンジして活躍してくれることを期待しています．

参考文献

1) Ohtsuki, T. (ed.), Problems on invariants of knots and 3-manifolds, Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto 2001), 377–572, Geom. Topol. Monogr., **4**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2004.

（おおつき・ともただ，京都大学数理解析研究所）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

宇 敷 重 広

1979年10月号

1979年の夏に8ビットパソコンのPC-8001が発売され，(怠惰な数学者には) 使いにくい大型電子計算機から，小回りのきくパソコンへと移り変わる時代の始まりの時期であった．力学系という名で呼ばれる数学の分野では数理現象の記述と解析を目指すが，当時の数学では，抽象的な一般論は盛んであったが，具体的な現象の解析が困難であった．カタストロフィー理論は1968年のルネ・トムの論文に始まり，1970年代に盛んに流行した．

必ずしも現実的ではないが，(隠れたポテンシャルなるものを想定して) 力学系が「勾配系」であるという仮定のもとで，(その仮定のもとでは数学的に精緻な理論であるが) 現象把握のための手法としてはいささか乱暴な記述法がカタストロフィー理論の考え方であった．不連続な質的現象を記述できる，というのがセールスポイントであった．特集「応用カタストロフィー」では，多彩な応用が語られている．数学的なアプローチの一つとしてのいわゆるトイモデルとして議論する分には面白いのであるが，本格的な数理モデルにするには様々な問題があり，論争が絶えなかった．



1976年の「リーとヨークのカオス」を嚆矢として，「カオス理論」が力学系研究の新しいパラダイムとなり，「勾配系」でない力学系では，簡単と思われていた力学系でも極めて複雑な不規則現象を呈することが明らかとなってきた．1980年代には，「カオス」と深く結びついて，マンデルブローの「フラクタル」が注目を集めた．どうやら，マスコミは否定の香りのするキーワードが大好きなようだ．

不規則現象の存在はそれ以前から知られていたが，そうした現象を調べるのに，急速に発達したコンピュータは強力な道具になった．「カオス」の研究で大活躍したのは言うまでもない．さらにその恩恵を大きく受けたのは，1980年代から始まった複素力学系の分野であった．この分野は，コンピュータ・グラフィックスを援用するので，1980年代の後半に大きく発展した．この30年の力学系理論の発展はコンピュータの驚異的発展に助けられてきたと言っても過言でない．そして，現在でも発展を続けるコンピュータに，数学は追い抜かされてしまっている．

これまでの研究で，低次元の力学系については相当のことがわかってきたが，高次元に特有の現象についてはいまでも可視化が困難なため，その研究はまだ発展途上である．グラフィックスと演算能力を活用することで，高次元の力学系の研究に新しい道が開けるのではないかと考えている．

(うしき・しげひろ，京都大学大学院人間・環境学研究科)

目で見て学ぶ量子力学

第13回 実験でひもとく量子の不思議

電子の位相で見るミクロの磁力線

干渉電子顕微鏡

外村 彰

13.1 はじめに

電子線ホログラフィーの実用化によって，電子の波面が光の波面として再生できるようになった．電子の像は，舞台をオプティカル・ベンチの上に移して，光の像として3次元的に結像される．電子線ホログラムを撮っておきさえすれば，後から，様々な情報を得ることができる．ピントの合った像であれ，ローレンツ顕微鏡像などのピントをずらした像であれ，電子回折像であれ，光学再生によって得ることができる．再生像の分解能が原子オーダーにまで至ったので，ブラッグ反射による回折波も光で再生できる．

電子線ホログラフィーによって拓かれた可能性は，それだけに止まらない．光再生段階で光の干渉計を組み合わせることによって，位相の等高線を描く“干渉顕微鏡像”が得ることができる．とりわけ，磁場を観察したときには，磁力線そのものが位相の等高線として直接観察できる．隣り合う干渉縞の間には一定の磁束 $\frac{h}{e}$ $(= 4 \times 10^{-15}\,\mathrm{Wb})$ が流れているので，定量的でもある．さらに，この磁束の測定感度は観察する電子線の加速電圧に依らず，一定である．通常，電子線と場の相互作用は，速い電子線ほど，小さくなるはずである．1980年に，位相の等高線が微小磁束毎の磁力線そのものになることを見出したとき[1)]，何ときれいな関係なのだろうと思い，深い真理を見たような気がして，感銘を覚えた．電子の波と電磁場の相互作用の背後には，“ゲージ原理”と呼ばれる“より深遠な自然の摂理”が隠されており，それがちょうどその頃から明らかになっていく．

今回は，“干渉顕微鏡像”によって，何が見えるのかを基本から考え，特にミクロの磁力線の観察への応用例を紹介しよう．

13.2 干渉顕微鏡像

弱い電磁場の中を電子が通ったときには，位相だけが変化する．実は，電子が電磁場に触れていない場合にも，位相が変化することがあるので，厳密なことを言うと，相互作用の相手は，“電磁場”というよりも“ベクトル・ポテンシャル”$\boldsymbol{A}$ と“スカラー・ポテンシャル”ϕ である．実際，$\boldsymbol{A}$ だけで，観察可能な効果“アハラノフ・ボーム（AB）効果”[傍注1] が生じる．

透過電子顕微鏡像の位相分布を等高線として表示したものが，“干渉顕微鏡像”である．電子線ホログラフィーの光再生段階で，再生像（透過電子顕微鏡像）に参照平面波を重ねることによって得られる[傍注2]．電子顕微鏡像の各点での“位相”が等高線の形で表示できる．厳密に言うと，“位相”ではなくて，参照波との“位相差”である．

「電子の位相は，どんな新しい情報をもたらしてくれるのだろうか？」——電子線の位相の等高線は，極めて直観的な解釈ができる．観察対象が，均一な物質の場合には厚さの等高線を，磁場の場合には磁力線を，そして電場の場合には等電位線を示す．

[傍注1] Y. アハラノフと D. ボームは，1959 年に量子力学におけるポテンシャルの重要性を示す電場と磁場の 2 種類の実験を考案した．後に AB 効果と呼ばれる．その 10 年前に，W. エーレンベルクと R.E. サイデイは電子光学における屈折率を議論した論文の中で，“磁場”の AB 効果の存在を見出している．このため AB 効果のことを ESAB 効果と呼ぶ人もいる．

[傍注2] 電子顕微鏡の中で，干渉顕微鏡像を得るのは難しい．像を作る電子線と同じ方向から参照波をあてることが難しいからである．このため，電子線の波面を電子線ホログラフィーによって光の波面に変換しておけば，ハーフミラーなどの存在する光学領域で，干渉顕微鏡像を容易に得ることができる．勿論，計算によって求めることもできる．

13.3 位相で見るミクロの世界

電子は，電磁ポテンシャルによって位相変化を受ける．前回に求めた電子の屈折率 n を表す (12.6) 式を思い出そう．$n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t}) = \frac{1}{\sqrt{2me\phi_0}}\{mv - e\boldsymbol{t}\boldsymbol{A}\} = \sqrt{1+\frac{\phi(\boldsymbol{r})}{\phi_0}} - \sqrt{\frac{e}{2m\phi_0}}\,\boldsymbol{t}\boldsymbol{A}$. ここで，$e$, m, ϕ_0, v は，それぞれ電子の電荷（絶対値），質量，加速電圧，速度，そして $\boldsymbol{t}$ は軌道の接線ベクトル $\left(\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right)$，$\phi$ は ϕ_0 を基準としたときのスカラー・ポテンシャル（電位），そして $\boldsymbol{A}$ はベクトル・ポテンシャルである．

この式から具体的な例を考える．

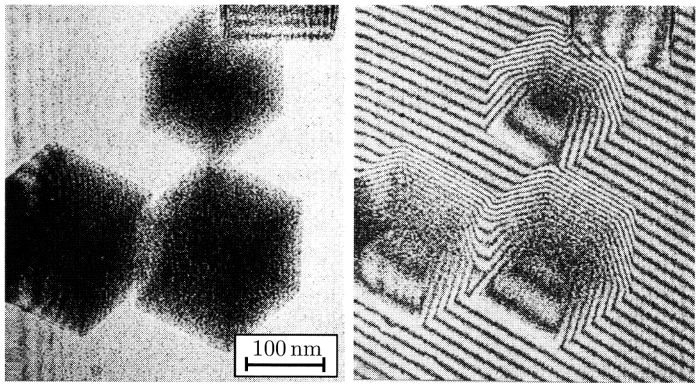
(a) 電場を見る

$\boldsymbol{A}$ を 0 とすれば，屈折率は，$n(\boldsymbol{r}) = \sqrt{1+\frac{\phi(\boldsymbol{r})}{\phi_0}}$ となり，$\boldsymbol{r}$ だけの関数になる．

まず均一な物質から成る試料を考えよう．透過電子線の等高干渉縞は，厚さの等高線を示す．

実例を示そう．一般に，物質内部の電位は，真空中より 10〜30 V 程度高い．マイナスの電荷をもつ電子から見ると，ポテンシャルが低くなる．内部の自由電子が外に出てしまわないのは，このお陰である．入射電子が物質内に入ると加速される．この電位は，“内部電位”V_0 と呼ばれ，物質固有の値を持つ．物質内部を通るときの電子波の位相変化は $\frac{S}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda}\int n\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ と軌道に沿っての線積分で表せるので，この物質を，屈折率が $\sqrt{1+\frac{V_0}{\phi_0}} \fallingdotseq 1+\frac{V_0}{2\phi_0}$ の媒質と見なすことができる[傍注3]．したがって，内部電位 V_0 の値が分かっている場合には，位相測定によって試料の厚さを観測できる．こうして，位相の等高線を観察すれ

[傍注3] 媒質中の電子の速度は真空中よりも増えるので媒質の屈折率は 1 よりも大きくなる．光の場合の屈折率 n は，逆で $n=\frac{c}{v}$ で与えられる．この式の v としては，波面が進む速度（位相速度）を入れなければならない．



(a)　　　　(b)

図 13.1　酸化マグネシウムの微粒子．(a) 再生像，(b) 干渉顕微鏡像．電子線の強度だけを記録した再生像 (a) では，粒子の輪郭は分かるが，立体形状まで決めることはできない．透過電子線の波面を示す干渉顕微鏡像（Interferogram）(b) では，厚さの分布が一目でわかる．

ば，等高干渉縞は厚さの等高線になるのである．

「この方法で，どれだけわずかな厚さ変化まで測定できるのだろうか？」

100 kV の電子線を使うと，1 波長の位相変化を生じる厚さの変化は 200〜700 Å になる．10 倍の位相差増幅ができるとすると，20〜70 Å を単位とした厚さの等高線を描ける．原子レベルで厚さ分布を測定するには 100 分の 1 波長の精度での位相測定が必要になる．

実例を示せば分かりやすいと思う（図 13.1）．図 (a) は酸化マグネシウムの微粒子[傍注 4] の再生像で，電子顕微鏡像と同じである．試料を透過した電子線の強度分布を記録したものなので，粒子の輪郭は分かるが，立体形状までは決められない．干渉顕微鏡像 (b) では，干渉縞が電子顕微鏡像の上に重なるので立体的に見えてくる．位相変化，つまり厚さ変化は，周期的な干渉縞からのずれとして観察できる．2 倍位相差増幅をしてあるので，200 Å 単位での厚さ変化を示している．これは，物体波に対して傾けた参照波を重ねて得た干渉顕微鏡像（Interferogram）である．

[傍注 4]　マグネシウムを大気中で燃やしたときに生じる煙の微粒子．

この場合，内部電位を既知の量として，試料の厚さを測定した．逆に，厚さが他の手段で分かっていれば，内部電位を測定できる．

干渉顕微鏡では，ミクロの“電位分布”を観測することもできる．このとき，“厚さ”が一定であると仮定すれば，位相の等高線は等電位線に一致する．例えば，電場が存在する場所（電位分布は $\phi(\boldsymbol{r})$）を通った電子線（物体波）と電場のない真空中（電位分布は $\phi(\boldsymbol{r})=0$ で屈折率 $n=1$）を通った電子線（参照波）を重ね合わせたときに得られる干渉パターンから 2 つの波の位相差を計算することができる．相対的な位相差 $\frac{\Delta S}{\hbar}$ は，$\frac{\Delta S}{\hbar}=\frac{2\pi}{\lambda}\int(n-1)\,\mathrm{d}s$ になるので，$\frac{\Delta S}{\hbar}=\frac{2\pi l\phi(\boldsymbol{r})}{2\lambda\phi_0}=\frac{e}{\hbar}\phi(\boldsymbol{r})\tau$ で与えられる．ここで l は，電場が存在する領域の電子軌道に沿っての長さ，τ はその領域を電子が走行する時間である．ここで，$\lambda=\frac{h}{mv}$, $l=\tau v$, $\frac{mv^2}{2}=e\phi_0$ を使っている．$\phi(\boldsymbol{r})$（電位）$\times\,\tau$（電子の走

行時間）が h/e になると，一波長の位相変化が生じることになる．

この測定法の感度について考えてみる．加速電圧 100 kV の電子線の速度は，およそ光速の $\frac{1}{2}$ なので，1000 Å の領域を通過する時間 τ は 6×10^{-16} 秒．$\frac{h}{e}$ は 4.1×10^{-15}（ボルト・秒）なので，6 ボルトの電位差が一波長の位相変化に対応する．10 倍位相差増幅した干渉顕微鏡像では 0.6 ボルト単位で等電位線が描かれることになる．

［傍注 5］ 半導体素子では，n 型（電子が電流を担う）半導体と p 型（ホールが電流を担う）半導体を近接させた領域（pn 接合）を設け，素子の基本的な構造として用いる．ここに局所的な電場が発生する．

P.G. メルリら[2] は，pn 接合[傍注 5] 近傍のミクロな電位分布を初めて観測した．Yu.A. クリューピンら[3] は，電界放出陰極チップの先端近傍の局所的な電位分布の測定を行なった．最近になって pn 接合部の電位分布の観察が，半導体分野で関心を呼び，電子線ホログラフィーの半導体素子への応用に注目が集まっている[4]．

(b) 磁場を見る

磁場だけが存在する場合の屈折率は，(12.6) 式の $\phi(\boldsymbol{r})$ を $\phi(\boldsymbol{r}) = 0$ とおくことによって，$n(\boldsymbol{r}) = 1 - \sqrt{\frac{e}{2m\phi_0}}\boldsymbol{tA}$ になる．位相 $\frac{S}{\hbar}$ は，$\frac{2\pi}{\lambda}\int n(\boldsymbol{r})\mathrm{d}s$ で与えられるが，参照平面波との位相差は，$\frac{\Delta S}{\hbar} = -\frac{e}{\hbar}\oint \boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{e}{\hbar}\int \boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{e}{\hbar}\Phi$ となる．一方の電子線を磁場の中を通った物体波とし，他方を磁場のない所を通った参照波として，2 つの波を重ね合わせて干渉顕微鏡像を作る．この式の初めの周回積分は，電子源の 1 点から発した 2 つの波が別々の経路をたどって 1 点で重なり合うときに，2 つの経路をつなぎ合わせた閉回路で行なわれる．2 番目の面積分は，この回路で囲まれた面での積分を行う．つまり位相差は 2 本の電子線が取り囲む磁束 Φ に比例することになる．

干渉顕微鏡像で磁場を観察すると，極めて直観的な解釈ができる．

(1) 電子顕微鏡像の上に，投影された磁力線が直接描かれる．

(2) ローレンツ顕微鏡では，像のピントをぼかさなければならないが，この方法では，像にピントが合っているので，試料の微細構造と磁気的構造との関連性を直接観察できる．

(3) 干渉縞の間には一定 $\left(\frac{h}{e}\right)$ の微小磁束が流れているため，定量測定が可能である．磁力線観察の応用も広がりつつある[5]．

13.4 ミクロの磁力線の観察

(a) 強磁性微粒子

［傍注 6］ コバルトを希ガスの中で燃やしたとき，酸化せずに発生する煙の微粒子．コバルトは，鉄などと同様，強磁性体の一種で，磁気をおびている．

六角形のコバルト微粒子[傍注 6] の磁力線を観察した例を図 13.2 に示す．(a) は再生像で，電子顕微鏡像と同等である．粒子の内部には，何のコントラストも見られない．一方，干渉顕微鏡像（等高干渉縞）(b) には，同心円状の等高線が観察できる．これは，磁力線が微粒子内部で回転していることを意味している．スピンが，粒子内で回転している様子が一目瞭然である．微粒子のごく周辺では磁力線は六角を描いているが，中心部分では円形になっている．この等高干渉縞から，磁力線が右回りか左回りかを判断することはできない．

磁力線の回転方向は，再生光学系で参照光をわずかに傾けて得た干渉顕微鏡

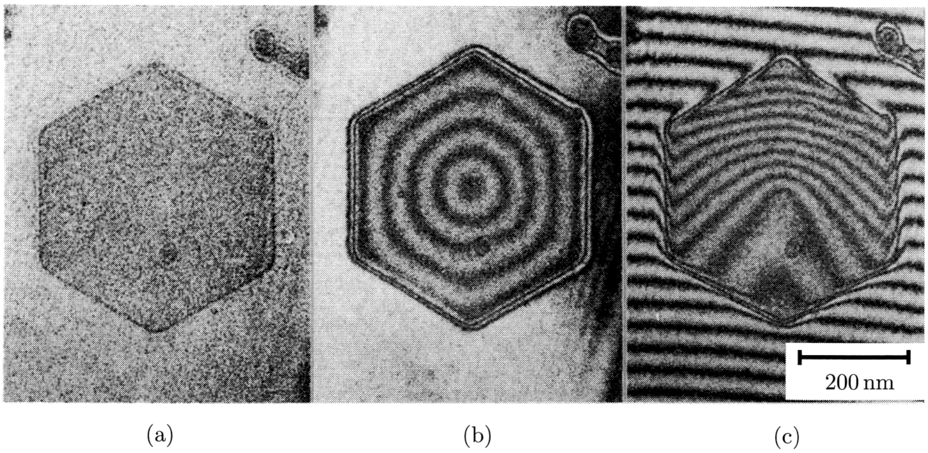


図 13.2　六角コバルト微粒子の干渉顕微鏡像（2 倍位相差増幅）．(a) 電子顕微鏡像，(b) 干渉顕微鏡像（等高干渉縞），(c) 干渉顕微鏡像（Interferogram）．

像（Interferogram）(c) から決めることができる．干渉縞は粒子の縁で下方に曲がり，粒子内部で逆に上に曲がっている．これは，次のように解釈できる．電子線は粒子内部では，内部電位（V_0）分だけ加速され，波長が短くなる．したがって，粒子を透過した電子線は，位相が遅れる．さらに，磁力線によって影響を受ける．磁力線が右回りか左回りかによって，電子線の位相は粒子の中心部分で進んだり遅れたりする．図 13.2 の粒子の場合には，入射電子線の方向から見て右回りの磁化分布であることが (c) から結論できる．勿論，回転磁場を反対から見れば逆回転になる．

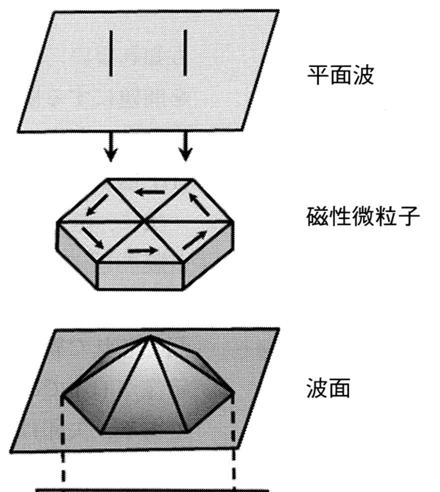


図 13.3　電子の波が磁性微粒子を透過したときの波面と干渉顕微鏡像．

回転磁場を通った電子の波面がどのようになるかを図 13.3 に模式的に示した．まず粒子の外部に入射した平面電子波は，磁場が存在しないので，平面波のまま通りすぎる．次に，粒子内部の波面を考える．位相差は，2 本の電子線で挟む磁束で決まることを考えながら波面を作図すると六角錐状の波面になる．波面が磁力線を回転軸に傾くといっても良い．こうしてできた波面の等高線は磁力線に沿っている．磁力線に沿った 2 点を通る電子線の間には，磁束が含まれていないからである．

波面はゲージに依存する量なので，この説明では満足いかない読者もいるか

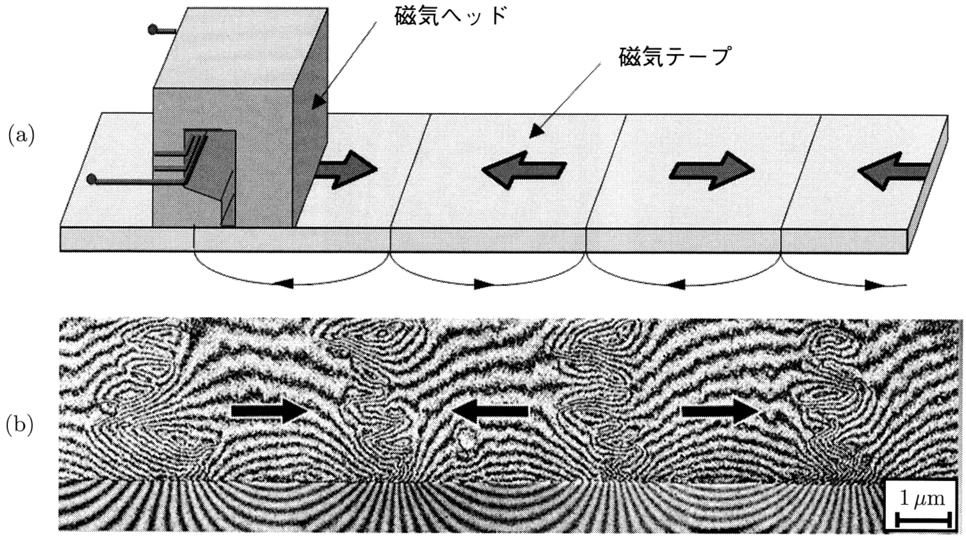


図 13.4　磁気テープの磁力線の観察．(a) 磁気記録の方法，(b) 干渉顕微鏡像．

も知れない．確かに波面は一通りには決まらないが，2 本の電子線の“位相差”を問題にする限り不都合は起こらない．“波面の等高線”や図 13.3 の干渉顕微鏡像は，どんなゲージでも変わらない．

(b) 磁気記録パターン

次に，磁気記録への応用例を示す．図 13.4 は，磁気記録を施したコバルト蒸着膜[傍注7]の観察例である．(a) は記録方法を示した模式図である．磁気ヘッドを動かしながら，右向き左向きの磁化を (1.0) の情報として膜に記録していく，記録された膜を基板からはがして膜に垂直に電子線をあてて観察した干渉顕微鏡像が (b) である．膜は途中で切れているので，写真の下半分は何もない空間である．矢印は記録した磁化の方向を示す．テープに記録された磁力線が等高干渉縞として観察できる．磁力線が正面衝突する境界領域に，複雑に渦巻く磁力線の様子を捉えることができる．この磁力線は蛇行しながら縁へと流れ出し空間に漏れ出す．干渉縞の本数を数えることによって磁束量を定量的に測定することができる．

磁気記録の高密度化を達成するには，まず境界の渦領域の幅を小さくしなければならない．この幅は，記録媒体の磁気特性や記録方法によって面白いように変化する．そこで，こうした観察をもとに，境界領域が狭くなる条件を見出し，面内記録で単位長 0.15 μm までの記録を確認した．

(c) 磁気ヘッド

磁気記録の高密度化の要請によって，垂直磁気記録が実用化され，記録媒体と同時に磁気ヘッドへの要求もさらに高まってきている．このため，局所的かつ強い磁場が必要とされる．

図 13.5 は NiFe[傍注8] の磁気ヘッドの磁力線を観察した干渉顕微鏡像の例である．120 Oe[傍注9] の磁場を写真中の上下方向に印加するとヘッドから放射状に漏れ出している磁力線が観察できる（図 13.5 (a)）．磁場を強くするには，磁化の

[傍注7]　磁気テープには，磁性粉や磁性膜が使われる．コバルトを蒸着させて作った薄膜がコバルト蒸着膜である．

[傍注8]　NiFe はパーマロイとも呼ばれ，しばしば磁性材料として使われる．

[傍注9]　Oe はエルステッドと呼ばれ，磁場の単位である．電流の周りに回転磁場が生じることを見つけたエルステッド（H.C. Oersted）に由来する．

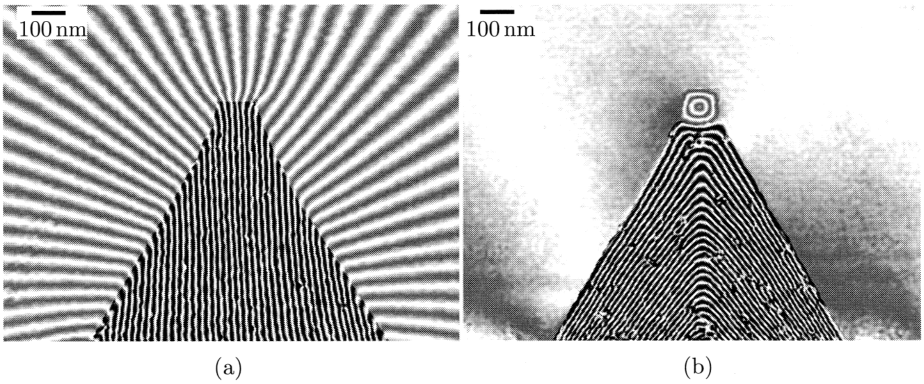


図 13.5　磁気ヘッドの磁力線．上下方向に 120 Oe 以上の磁場を印加すると，ヘッドは上下方向に磁化する．印加磁場をゼロにするとヘッド内部の磁力線は U ターンする．(a) 印加磁場 = 120 Oe，(b) 印加磁場 = 0 Oe.

大きなヘッド材料を選んで，ヘッド内部の磁力線の密度を高くすれば良い．磁場を強くしさえすれば良い訳ではない．磁気記録をしていないときにヘッドに大きな残留磁化が残っていると，せっかく記録された情報を消したり変化させたりすることがある．時に応じて，ヘッドから外部に出る磁場をゼロにしたいときもある．

「外部磁場をゼロにするには，どうしたらよいのか？」——物質を変えない限りヘッドの磁化は一定である．ただ磁化の向きは変えることはできる．答えは印加していた磁場をゼロにしてみれば，分かる．ヘッド内部で上下方向にまっすぐに走っていた磁力線（図 13.5 (a)）が U ターンする（図 13.5 (b)）．ヘッドの先端部分では磁力線はぐるっと回って閉回路を作る．(a), (b) いずれの磁力線分布も左右対称である．

上下に平行に走っていた磁力線が，どのような過程を経て U ターンするのかを，考えてみてほしい．左右対称性を保ったままで (a) から (b) に形を変えることは不可能である．

答えは，実験結果を見れば明らかである（図 13.6）．印加磁場を弱めていくと，ヘッド内部のまっすぐな磁力線 (a) に変化が起こる．ヘッド左下の磁力線が曲がり始め (b)，次第に上に移動する (c)．「どうして曲がったり，上に移動したりするのだろうか？」——(c) を見れば分かる．U ターン磁力線が下から出現して，その先端が磁力線を曲げ，曲がった領域をさらに押し上げていく (d)．そして，ついには，U ターン磁力線がヘッドの全領域を覆ってしまう．曲がった磁力線はヘッド先端部に押しやられて，同心円を描く．

(a), (b), ⋯ と，印加磁場を減らすにつれてヘッドからの漏れ磁場は減っていく．ゼロになると，漏れ磁場はほとんどなくなってしまう．こうして，磁力線のパターンは左右対称性を取り戻す．「初めのパターンは対称で，磁場を左右対称軸に沿って減らしていくのに，何故，対称性が左側から破れたのか？」——これは，ヘッドに印加した磁場の向きで決まる．下向きに磁化されている場合には右側から破れる．

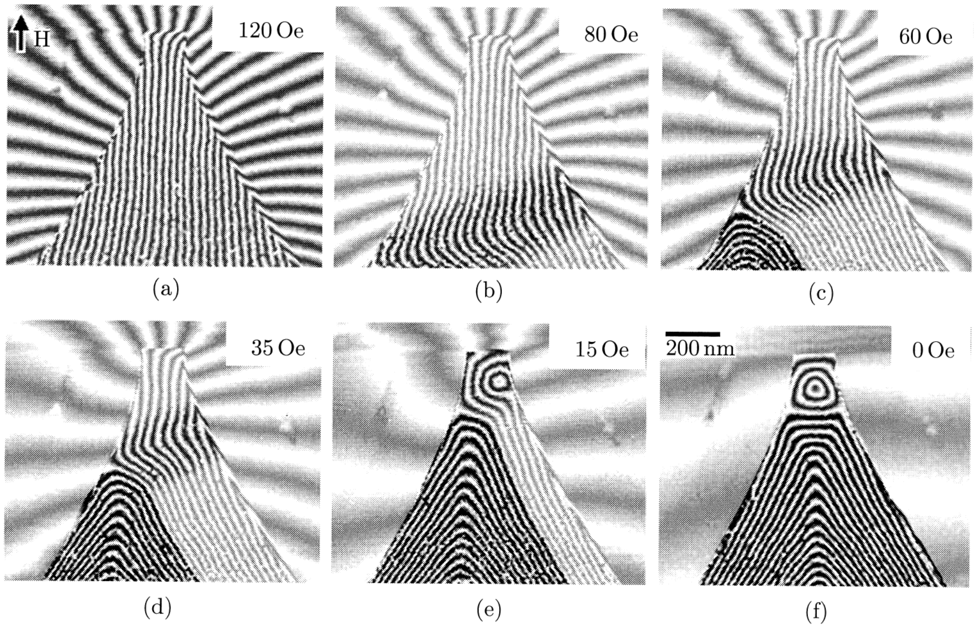


図 13.6　ON から OFF にしたとき，磁力線はどのように変化するか？ (a) 印加磁場：120 Oe, (b) 80 Oe, (c) 60 Oe, (d)35 Oe, (e) 15 Oe, (f) 0 Oe.

(d) モノポール

電荷には，プラスとマイナスがある．しかも電荷は量子化されていて，e の整数倍の値しか存在しない．一方，磁石のほうは，いつも N 極と S 極が対になっている．単独に N 極，S 極が観測されたためしはない．

しかし，磁気単極子 “モノポール” の存在は，ディラック（P.A.M. Dirac）によって，電荷の量子化を説明するためには必須なものとして存在を予言されていた．ゲージ理論でも，宇宙が相変化をしたときに巨大な質量をもつモノポールが発生したことが予測されているが，未だに見つかっていない．

「このモノポールを電子線の干渉顕微鏡で観察したらどのように見えるだろうか？」――面白そうなので，電子の波面がどうなるかを考えてみよう．モノポールからは，磁力線が放射状に出ている．電子の波が磁力線にあたると，波面は，磁力線を回転軸として，傾けられる（図 13.7 (a)）．作図をしてみると，透過波面は，螺旋状になる．波面の上にのってモノポールのまわりを一周すると，螺旋階段の一階上にたどりつく．波動関数は多価関数になってしまった．波長を単位に等高線を描こうとしても，一般に 1 階，2 階，3 階，… で等高線が異なった場所に生じてしまうので，描くことができない．こんな不可思議なことはあり得ない．

この困難は，「モノポールの磁荷は $\frac{h}{e}$ の整数倍でなければならない」とするディラックの量子条件によって救われる．この条件下では，1 階，2 階，… の波面の高さは，ちょうど波長の整数倍になり，等高線は同じ場所に生じる．理論的にみた場合，この量子条件の下では，ゲージ変換によって螺旋階段のすべ

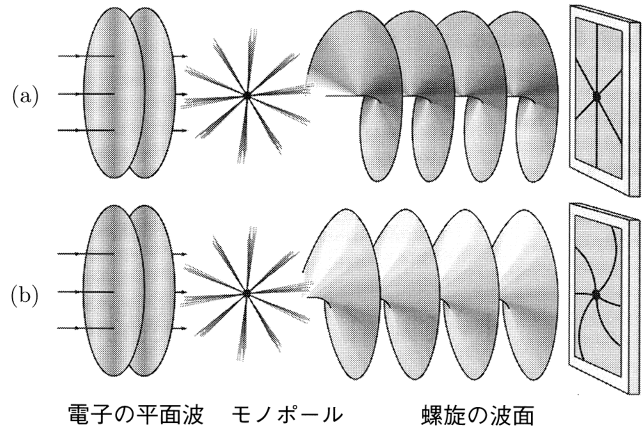


図 13.7　モノポールを見る．(a) 磁荷をもつモノポール，(b) 磁荷だけでなく電荷をも有するモノポール．

ての階が等価になる．$n\left(\frac{h}{e}\right)$ の磁荷をもったモノポールの干渉顕微鏡像には，n 本の等高線が放射状に現れる．図 13.5 の磁気ヘッドに似ている．確かに，磁気ヘッドの周辺を通った電子の波面は，部分的に螺旋状になっている．

もしもモノポールが電荷をもっていると（図 13.7 (b)），電場による位相変化がつけ加わって波面はさらに変化する．螺旋階段の階段が螺旋の中心軸から遠ざかるほど低くなる．この波面を立体的に分かりやすく描くのは簡単ではないが，この等高線は，モノポールから放射状ではなく，渦巻きの形になる．この等高線から直線成分と渦巻き成分を分離すれば，電荷と磁荷の区分ができる．

こうしてモノポールの電磁気的な性質は，干渉顕微鏡を用いれば，完全に決定できる．

参考文献

1) A. Tonomura, T. Matsuda, J. Endo, T. Arii and K. Mihama: *Phys. Rev. Lett.* **44** No.21 (1980) 1430.
2) P.G. Merli, F.G. Missiroli and G. Pozzi: *J. Microsc.* (Paris) **21** (1974) 11.
3) Yu.A. Kulyupin, S.A. Nepijko, N.N. Sedov and V.G. Shamonya: *Optik* **52** (1978/1979) 101.
4) 例えば平山司：日本結晶学会誌 **47** (2005) 95.
5) 例えば D. Shindo and Y. Murakami: *J. Phys. D: Appl. Phys.* **41** (2008) 183002.

（とのむら・あきら，(株)日立製作所基礎研究所／(独)理化学研究所基幹研究所／(独)沖縄科学技術研究基盤整備機構）

問題例で深める物理 Problem Answer Discussion 第9回

1次元イジング模型と転送行列

香取 眞理・中野 徹

行列の固有値や固有ベクトルといった**線形代数の知識**は，力学，振動・波動，量子力学の問題を解くのに大変有用であることはすでに見てきたが，統計力学の問題に対しても同様である．1次元絶縁磁性体の統計力学模型である**1次元イジング模型**を**転送行列法**を用いて解析してみよう．分配関数，自由エネルギー，磁化，相関関数といった物理量が，転送行列の固有値と固有ベクトルの成分を用いて表現される．

9.1 1次元イジング模型

円周上に N 個の電子を等間隔に並べる．各電子は $\hbar/2$ の大きさのスピンを持っている．電子は動くことはできないが，スピンの向きは上向きから下向きへ，またその逆に，自由に反転することができる．これを（**周期的境界条件**の下での）**1次元イジング模型**と言う．j 番目の電子 $(1 \leq j \leq N)$ のスピンの向きを σ_j で表す：スピンが上向きなら $\sigma_j = 1$，下向きなら $\sigma_j = -1$．N 個の電子の**スピン変数** σ_j の値の列 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N)$ を**スピン配置**と言う（図 9.1 参照）．

スピン配置 $\boldsymbol{\sigma}$ ごとに系の磁気的なエネルギーの値が定まる．この関係を表すのが**ハミルトニアン** $\mathcal{H}^{\text{Ising}}$ であり，次式で与えられる場合を考える：

$$\mathcal{H}^{\text{Ising}}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{N} h^{\text{Ising}}(\sigma_j, \sigma_{j+1}), \qquad (9.1)$$

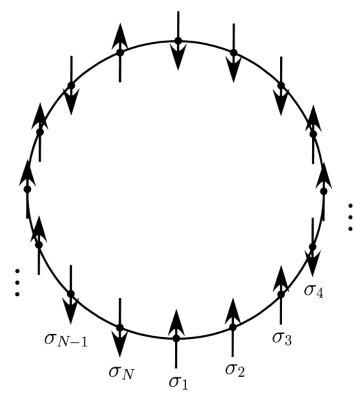


図 9.1　円周上のイジング模型．周期的境界条件 $\sigma_{N+1} = \sigma_1$ を課す．

$$h^{\text{Ising}}(\sigma, \sigma') = -\frac{H}{2}(\sigma + \sigma') - J\sigma\sigma'. \quad (9.2)$$

ただし，$\sigma_{N+1} \equiv \sigma_1$ とする．まず (9.2) 式の第1項に注目しよう．H は系に印加された**磁場**を表す．$H > 0$ とすると第1項の値は，$\sigma = \sigma' = 1$ のとき $-H < 0$，$\sigma = 1, \sigma' = -1$ または $\sigma = -1, \sigma' = 1$ のとき 0，$\sigma = \sigma' = -1$ のとき $H > 0$ となる．当然，エネルギーが低い状態のほうが実現しやすいので，スピンは外場の向きに揃いやすいことになる．

> **問題 9.1**　(9.2) 式の第2項 $-J\sigma\sigma'$ は，隣り合う2つのスピン σ と σ' の間のどのような二体相互作用を表すか．J の符号に応じて答えなさい．

解答　$J > 0$ の場合 $-J\sigma\sigma'$ は，$\sigma = \sigma' = \pm 1$ のとき $-J < 0$ の値をとり，$\sigma = 1, \sigma' = -1$ また

は $\sigma=-1,\sigma'=1$ のとき $J>0$ の値をとる．したがって，隣り合う 2 つのスピン σ と σ' の向きを揃えるような相互作用を表す（これを**強磁性相互作用**と言う）．$J<0$ のときは，スピンの向きを反対向き（反平行）にしようとする相互作用（**反強磁性相互作用**）を表す．■

1 次元イジング模型が**絶対温度** T **の熱平衡状態**にあるとする．**カノニカル分布（正準分布）**における**分配関数**は，$\beta=1/k_{\rm B}T$ として，

$$Z_N(H,T)=\sum_{\sigma_1=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1}{\rm e}^{-\beta\mathcal{H}^{\rm Ising}(\boldsymbol{\sigma})} \tag{9.3}$$

で与えられる．これを一般のスピン数 N に対して計算するにはどうしたらよいだろうか．

9.2 転送行列法

イジング模型のハミルトニアン (9.1) は，最近接スピン対 (σ_j,σ_{j+1}) の関数である $h^{\rm Ising}(\sigma_j,\sigma_{j+1})$ の**和**になっている．これに $-\beta$ をかけて e の肩に乗せたのが**ボルツマン因子** ${\rm e}^{-\beta\mathcal{H}^{\rm Ising}(\boldsymbol{\sigma})}$ なので，これは最近接スピン対 (σ_j,σ_{j+1}) の関数の**積**で与えられることになる．したがって，

$$\begin{aligned}t_{\sigma\sigma'}&={\rm e}^{-\beta h^{\rm Ising}(\sigma,\sigma')}\\&=\exp\left\{\frac{\beta H}{2}(\sigma+\sigma')+\beta J\sigma\sigma'\right\}\end{aligned} \tag{9.4}$$

とすると，分配関数 (9.3) は次のように表せる：

$$\begin{aligned}&Z_N(H,T)\\&=\sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1}t_{\sigma_1\sigma_2}t_{\sigma_2\sigma_3}\cdots t_{\sigma_N\sigma_1}\\&=\sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1}\prod_{j=1}^{N}t_{\sigma_j\sigma_{j+1}}.\end{aligned} \tag{9.5}$$

さてここで，$\sigma=1$ を第 1 成分，$\sigma=-1$ を第 2 成分に対応付けて，$t_{\sigma\sigma'}$ を成分に持つ 2×2 の行列を導入することにする：

$$\begin{aligned}\mathbb{T}&\equiv\begin{pmatrix}t_{11}&t_{1-1}\\t_{-11}&t_{-1-1}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}{\rm e}^{\beta H+\beta J}&{\rm e}^{-\beta J}\\{\rm e}^{-\beta J}&{\rm e}^{-\beta H+\beta J}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{9.6}$$

この行列を**転送行列**と呼ぶ．

問題 9.2　次の公式を導きなさい：

$$Z_N={\rm tr}\,\mathbb{T}^N. \tag{9.7}$$

ただし，tr は行列の**トレース**（対角成分の和）をとることを表す．

解答　転送行列 $\mathbb{T}$ の定義 (9.6) より，その (σ,σ')-成分が (9.4) である：$(\mathbb{T})_{\sigma\sigma'}=t_{\sigma\sigma'}$．ここで，行列の掛け算の定義を思い出すと，

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma_2=\pm1}t_{\sigma_1\sigma_2}t_{\sigma_2\sigma_3}&=\sum_{\sigma_2=\pm1}(\mathbb{T})_{\sigma_1\sigma_2}(\mathbb{T})_{\sigma_2\sigma_3}\\&=(\mathbb{T}^2)_{\sigma_1\sigma_3}\end{aligned}$$

であるから，(9.5) 式の N 重和は $\sum_{\sigma_1=\pm1}(\mathbb{T}^N)_{\sigma_1\sigma_1}$ であることが分かる．そしてこれは，2×2 行列 $(\mathbb{T})^N$ の対角成分の和であるから (9.7) である．■

1 次元イジング模型の転送行列 $\mathbb{T}$ は (9.6) 式で与えられているように**実対称行列**なので，**実直交行列**で対角化できて，固有値は実数である．ところが，2×2 の実直交行列は一般に，実パラメータ ϕ を用いて

$$V=\begin{pmatrix}\cos\phi&-\sin\phi\\\sin\phi&\cos\phi\end{pmatrix} \tag{9.8}$$

と表せる．したがって，この形の行列を用いて

$$V^{-1}\mathbb{T}V=\begin{pmatrix}\lambda_+&0\\0&\lambda_-\end{pmatrix} \tag{9.9}$$

と対角化できるはずである．

問題 9.3　(i)　$\mathbb{T}$ の 2 つの固有値 λ_+,λ_- を求めなさい．

(ii)　V のパラメータ ϕ は，関係式

$$\cot2\phi={\rm e}^{2\beta J}\sinh(\beta H) \tag{9.10}$$

で定められることを示しなさい．

解答　(i)　行列 $\mathbb{T}$ の**特性方程式** $\det(\lambda I-\mathbb{T})=0$

を書き下すと（I は 2×2 の単位行列）

$$\lambda^2 - 2\mathrm{e}^{\beta J}\cosh(\beta H)\lambda + 2\sinh(2\beta J) = 0$$

となるので，

$$\begin{aligned}\lambda_\pm &= \mathrm{e}^{\beta J}\cosh(\beta H)\\ &\quad \pm \mathrm{e}^{-\beta J}\sqrt{1+\mathrm{e}^{4\beta J}\sinh^2(\beta H)} \quad (9.11)\end{aligned}$$

（複号同順）となる．λ_+ は λ_- より真に大きい（$\lambda_+ > \lambda_-$）．

(ii) V^{-1} は V の転置行列で与えられることに注意して計算すると

$$V^{-1}\mathbb{T}V = \begin{pmatrix} m_+ & m_0 \\ m_0 & m_- \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}m_\pm &= \mathrm{e}^{\beta J\pm\beta H}\cos^2\phi + \mathrm{e}^{\beta J\mp\beta H}\sin^2\phi\\ &\quad \pm 2\mathrm{e}^{-\beta J}\sin\phi\cos\phi, \qquad (9.12)\\ m_0 &= \mathrm{e}^{-\beta J}(\cos^2\phi - \sin^2\phi)\\ &\quad - 2\mathrm{e}^{\beta J}\sin(\beta H)\sin\phi\cos\phi\end{aligned}$$

（複号同順）となる．条件 $m_0 = 0$ は

$$\frac{\cos^2\phi - \sin^2\phi}{2\sin\phi\cos\phi} = \mathrm{e}^{2\beta J}\sinh(\beta H) \quad (9.13)$$

と書けるが，三角関数の倍角の公式より左辺は $\cot 2\phi$ であるからこれは (9.10) 式に等しい． ■

以下では，(9.8) かつ (9.10) ならば，ちゃんと複号同順で $m_\pm = \lambda_\pm$ となることを見ておくことにする．(9.12) 式より

$$\begin{aligned}m_+ + m_- &= 2\mathrm{e}^{\beta J}\cosh(\beta H),\\ m_+ - m_- &= 4\mathrm{e}^{-\beta J}\sin\phi\cos\phi\\ &\quad + 2\mathrm{e}^{\beta J}\sinh(\beta H)(\cos^2\phi - \sin^2\phi)\end{aligned}$$

である．(i) の結果 (9.11) より直ちに $m_+ + m_- = \lambda_+ + \lambda_-$．また，(9.13) を仮定すると

$$\begin{aligned}m_+ - m_- &= \left\{1+\mathrm{e}^{4\beta J}\sinh^2(\beta H)\right\}\\ &\quad \times \frac{2\mathrm{e}^{-3\beta J}}{\sinh(\beta H)}(\cos^2\phi - \sin^2\phi) \qquad (9.14)\end{aligned}$$

となる．(9.13) 式の両辺を 2 乗して $\sin^2\phi = 1 - \cos^2\phi$ を用いると，$X \equiv \cos^2\phi$ に対する 2 次方程式

$$\begin{aligned}&4\left\{1+\mathrm{e}^{4\beta J}\sinh^2(\beta H)\right\}X^2\\ &\quad -4\left\{1+\mathrm{e}^{4\beta J}\sinh^2(\beta H)\right\}X + 1 = 0\end{aligned}$$

が得られる．この正根 $X > 0$ はすぐに求められて

$$\begin{aligned}\cos^2\phi - \sin^2\phi &= 2X - 1\\ &= \frac{\mathrm{e}^{2\beta J}\sinh(\beta H)}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{4\beta J}\sinh^2(\beta H)}} \quad (9.15)\end{aligned}$$

が得られる．これを (9.14) 式に代入すると

$$m_+ - m_- = 2\mathrm{e}^{-\beta J}\sqrt{1+\mathrm{e}^{4\beta J}\sinh^2(\beta H)}.$$

これは $\lambda_+ - \lambda_-$ に等しい．したがって，$m_\pm = \lambda_\pm$（複号同順）が結論される．

さて，$V^{-1}V = VV^{-1} = I$，また一般に 2 つの正方行列 M と $\widetilde{M}$ に対して $\mathrm{tr}(M\widetilde{M}) = \mathrm{tr}(\widetilde{M}M)$ であることから，(9.7) 式より

$$\begin{aligned}Z_N &= \mathrm{tr}\left\{V(V^{-1}\mathbb{T}V)\cdots(V^{-1}\mathbb{T}V)V^{-1}\right\}\\ &= \mathrm{tr}\,(V^{-1}\mathbb{T}V)^N.\end{aligned}$$

そこで (9.9) 式を適用すると

$$Z_N = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{pmatrix}^N = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}\lambda_+^N & 0\\ 0 & \lambda_-^N\end{pmatrix}.$$

つまり，分配関数は転送行列 $\mathbb{T}$ の 2 つの固有値 (9.11) を用いて，

$$Z_N = \lambda_+^N + \lambda_-^N \qquad (9.16)$$

と与えられることが導かれた．

9.3 転送行列の最大固有値と熱力学極限

N スピン系の**自由エネルギー**は，分配関数より

$$F_N(H,T) = -k_{\mathrm{B}}T\log Z_N(H,T) \quad (9.17)$$

で与えられる．これは**示量性状態量**であり，N で割ると 1 スピンあたりの自由エネルギーが得られる．スピンの個数を無限個にする極限 $N\to\infty$ は

熱力学極限と呼ばれる．この極限をとると，H と T の関数である**熱力学関数**が導かれるからである．

問題 9.4　1 スピンあたりの自由エネルギー

$$f(H,T) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} F_N(H,T)$$

を求めなさい．そして**熱力学的関係式**

$$M(H,T) = -\frac{\partial}{\partial H} f(H,T) \qquad (9.18)$$

により，1 スピンあたりの**磁化**を求めなさい．

注　(9.1), (9.2), (9.3) および (9.17) より

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial H} F_N(H,T) \\ &= \sum_{\sigma_1=\pm1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm1} \left(\sum_{j=1}^{N} \sigma_j\right) P^{\text{Ising}}(\boldsymbol{\sigma}) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \langle \sigma_j \rangle_N \end{aligned}$$

である．ただし，$P^{\text{Ising}}(\boldsymbol{\sigma})$ はハミルトニアン (9.1) で指定される**カノニカル分布の分布関数**（**ギブス測度**）

$$P^{\text{Ising}}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{e^{-\beta \mathcal{H}^{\text{Ising}}(\boldsymbol{\sigma})}}{Z_N} \qquad (9.19)$$

である．図 9.1 のような周期的な系は**並進対称性**を持つので，$\langle \sigma_1 \rangle_N = \cdots = \langle \sigma_N \rangle_N$ である．よって，磁化 (9.18) は 1 スピン変数のカノニカル分布での**期待値**の熱力学極限 $\langle \sigma_j \rangle \equiv \lim_{N\to\infty} \langle \sigma_j \rangle_N$ に他ならない．

解答　(9.16) 式より，

$$\frac{1}{N} \log Z_N = \log \lambda_+ + \frac{1}{N} \log \left\{ 1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^N \right\}$$

である．ここで (9.11) 式から $|\lambda_-/\lambda_+| < 1$ であるので，$\lim_{N\to\infty} (\lambda_-/\lambda_+)^N = 0$．よって，熱力学極限では自由エネルギーには転送行列の**最大固有値**のみが寄与することが分かる：

$$\begin{aligned} f(H,T) &= -k_B T \log \lambda_+ \\ &= -k_B T \log \Big\{ e^{\beta J} \cosh(\beta H) \\ &\qquad + e^{-\beta J} \sqrt{1 + e^{4\beta J} \sinh^2(\beta H)} \Big\}. \end{aligned}$$

この結果から，(9.18) 式より

$$M(H,T) = \frac{e^{2\beta J} \sinh(\beta H)}{\sqrt{1 + e^{4\beta J} \sinh^2(\beta H)}} \qquad (9.20)$$

を得る．■

熱力学においては，絶対温度 T の熱平衡状態にある**流体**は，圧力 p と比容 v $(= V/N)$ を与えれば一義的に決まる．p, v と T との間の関数関係式を**状態方程式**と呼んだ（理想気体に対しては $pv = k_B T$）．**磁性体**に対する熱力学では，H と M が p と v の役割をする．(9.20) 式は H, M と T との間の関数関係式であるから，**1 次元絶縁磁性体の状態方程式**と見なすことができる．$T > 0$ では $H = 0$ とすると $M = 0$ となる．『1 次元では $T > 0$ で**自発磁化**は存在しない』ことが結論される．

ところで，問題 9.4 の解 (9.20) と，その前の問題 9.3 の解答の途中に出て来た式 (9.15) とを見比べて

$$M(H,T) = \cos^2\phi - \sin^2\phi = \cos 2\phi \quad (9.21)$$

であることに気がついた読者もいることだろう．磁化は転送行列 $\mathbb{T}$ の**固有ベクトル** (9.8) の成分で表現されるのである．このことをもっとストレートに導いてみよう．そのために，2×2 の対角行列

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (9.22)$$

を導入しておく．

問題 9.5　1 スピンあたりの磁化，すなわち σ_j の期待値は

$$\langle \sigma_j \rangle_N = \frac{1}{Z_N} \text{tr}\left(\mathbb{S}\mathbb{T}^N\right) \qquad (9.23)$$

と書けることを証明しなさい．そして熱力学極限をとることにより，(9.21) 式を導きなさい．

解答　期待値は分布関数 (9.19) を用いて

$$\langle \sigma_j \rangle_N = \sum_{\sigma_1=\pm1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm1} \sigma_j P^{\text{Ising}}(\boldsymbol{\sigma})$$

で与えられるが，(9.1), (9.4) および (9.6) を用い

ると，これは

$$\frac{1}{Z_N}\sum_{\sigma_1=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1}t_{\sigma_1\sigma_2}\cdots t_{\sigma_{j-1}\sigma_j}\sigma_j \times t_{\sigma_j\sigma_{j+1}}\cdots t_{\sigma_N\sigma_1}$$
$$=\frac{1}{Z_N}\sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_j=\pm1}(\mathbb{T}^{j-1})_{\sigma_1\sigma_j}\sigma_j(\mathbb{T}^{N-j+1})_{\sigma_j\sigma_1}$$

と書き直せる．ところが，行列 $\mathbb{S}$ を (9.22) 式のように定義しておいたので

$$(\mathbb{T}^{j-1})_{\sigma_1\sigma_j}\sigma_j=(\mathbb{T}^{j-1}\mathbb{S})_{\sigma_1\sigma_j} \tag{9.24}$$

であることから，上式は

$$\frac{1}{Z_N}\sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_j=\pm1}(\mathbb{T}^{j-1}\mathbb{S})_{\sigma_1\sigma_j}(\mathbb{T}^{N-j+1})_{\sigma_j\sigma_1}$$
$$=\frac{1}{Z_N}\sum_{\sigma_1=\pm1}(\mathbb{T}^{j-1}\mathbb{S}\mathbb{T}^{N-j+1})_{\sigma_1\sigma_1}$$
$$=\frac{1}{Z_N}\mathrm{tr}(\mathbb{T}^{j-1}\mathbb{S}\mathbb{T}^{N-j+1})$$

となる．これは (9.23) 式に等しい．次に (9.23) 式を

$$\frac{1}{Z_N}\mathrm{tr}\Big\{(V^{-1}\mathbb{S}V)(V^{-1}\mathbb{T}V)^N\Big\}$$

と書き直す．三角関数の倍角の公式より

$$V^{-1}\mathbb{S}V=\begin{pmatrix}\cos2\phi & -\sin2\phi\\ -\sin2\phi & -\cos2\phi\end{pmatrix} \tag{9.25}$$

となることに注意し，また (9.9) 式と (9.16) 式を用いると，

$$\langle\sigma_j\rangle_N$$
$$=\frac{1}{\lambda_+^N+\lambda_-^N}\times\mathrm{tr}\left\{\begin{pmatrix}\cos2\phi & -\sin2\phi\\ -\sin2\phi & -\cos2\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_+^N & 0\\ 0 & \lambda_-^N\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\frac{1}{\lambda_+^N+\lambda_-^N}\times\mathrm{tr}\begin{pmatrix}(\cos2\phi)\lambda_+^N & -(\sin2\phi)\lambda_-^N\\ -(\sin2\phi)\lambda_+^N & -(\cos2\phi)\lambda_-^N\end{pmatrix}$$
$$=\cos2\phi\times\frac{\lambda_+^N-\lambda_-^N}{\lambda_+^N+\lambda_-^N}$$

となる．$N\to\infty$ の極限をとると

$$M(H,T)=\langle\sigma_j\rangle\equiv\lim_{N\to\infty}\langle\sigma_j\rangle_N=\cos2\phi$$

となり，(9.21) 式が得られる． ■

9.4 転送行列の第2固有値と相関関数

スピン相関を定めるには，転送行列 $\mathbb{T}$ の**第2固有値** λ_- も必要である．N 個のスピンからなる1次元イジング模型の j 番目のスピン変数と k 番目のスピン変数の積 $\sigma_j\sigma_k$ の熱平衡状態での期待値を計算してみよう（$j<k$ とする：図9.2参照）．この期待値は分布関数 (9.19) の下

$$\langle\sigma_j\sigma_k\rangle_N=\sum_{\sigma_1=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1}\sigma_j\sigma_kP^{\mathrm{Ising}}(\boldsymbol{\sigma}) \tag{9.26}$$

で与えられる．

問題 9.6 (i) $\sigma_j\sigma_k$ の期待値は

$$\langle\sigma_j\sigma_k\rangle_N=\frac{1}{Z_N}\mathrm{tr}\Big(\mathbb{S}\mathbb{T}^{k-j}\mathbb{S}\mathbb{T}^{N+j-k}\Big) \tag{9.27}$$

と書けることを証明しなさい．

(ii) 次の熱力学量を λ_+ と λ_- を用いて表しなさい：$\langle\sigma_j\sigma_k\rangle=\lim_{N\to\infty}\langle\sigma_j\sigma_k\rangle_N$．

解答 (i) (9.26) 式は次のように書き直せる：

$$\frac{1}{Z_N}\sum_{\sigma_1=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm1}t_{\sigma_1\sigma_2}\cdots t_{\sigma_{j-1}\sigma_j}\sigma_j\times t_{\sigma_j\sigma_{j+1}}\cdots t_{\sigma_{k-1}\sigma_k}\sigma_k t_{\sigma_k\sigma_{k+1}}\cdots t_{\sigma_N\sigma_1}$$
$$=\frac{1}{Z_N}\sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_j=\pm1}\sum_{\sigma_k=\pm1}(\mathbb{T}^{j-1})_{\sigma_1\sigma_j}\sigma_j\times(\mathbb{T}^{k-j})_{\sigma_j\sigma_k}\sigma_k(\mathbb{T}^{N-k+1})_{\sigma_k\sigma_1}.$$

等式 (9.24) が成り立つので，この式は

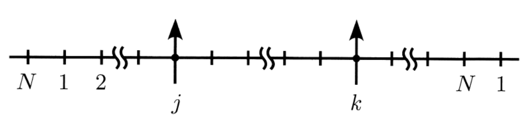


図 9.2 周期的境界条件の下での N スピン1次元イジング模型．j 番目のスピンと k 番目のスピンの相関を計算する．

$$\frac{1}{Z_N}\sum_{\sigma_1=\pm 1}\sum_{\sigma_j=\pm 1}\sum_{\sigma_k=\pm 1}(\mathbb{T}^{j-1}\mathbb{S})_{\sigma_1\sigma_j} \times (\mathbb{T}^{k-j}\mathbb{S})_{\sigma_j\sigma_k}(\mathbb{T}^{N-k+1})_{\sigma_k\sigma_1}$$
$$= \frac{1}{Z_N}\mathrm{tr}(\mathbb{T}^{j-1}\mathbb{S}\mathbb{T}^{k-j}\mathbb{S}\mathbb{T}^{N-k+1})$$

となる．これは (9.27) 式に等しい．

(ii)　(9.27) 式を

$$\frac{1}{Z_N}\mathrm{tr}\Big\{(V^{-1}\mathbb{S}V)(V^{-1}\mathbb{T}V)^{k-j} \times (V^{-1}\mathbb{S}V)(V^{-1}\mathbb{T}V)^{N+j-k}\Big\}$$

と書き直す．(9.9), (9.16) および (9.25) より

$$\langle\sigma_j\sigma_k\rangle_N = \frac{1}{\lambda_+^N+\lambda_-^N} \times \Big\{(\cos^2 2\phi)\lambda_+^N + (\sin^2 2\phi)\lambda_-^{k-j}\lambda_+^{N+j-k} + (\sin^2 2\phi)\lambda_+^{k-j}\lambda_-^{N+j-k} + (\cos^2 2\phi)\lambda_-^N\Big\}$$

を得る．$N\to\infty$ の極限をとると

$$\langle\sigma_j\sigma_k\rangle = \cos^2 2\phi + \sin^2 2\phi\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{k-j}$$

という綺麗な結果が得られる．■

離れた位置にある電子のスピンの向きがどれだけ揃っているかという**スピン相関**を表すのに，**相関関数**を考える．これは，スピン間の距離 $r=k-j>0$ の関数として

$$G(r) = \lim_{N\to\infty}\Big\{\langle\sigma_j\sigma_k\rangle_N - \langle\sigma_j\rangle_N\langle\sigma_k\rangle_N\Big\}$$

と定義される．上の結果より

$$G(r) = \sin^2 2\phi\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^r$$

と求まるが，これは $\xi(H,T)=\{\log(\lambda_+/\lambda_-)\}^{-1}$ と置くと，

$$G(r) \propto \mathrm{e}^{-r/\xi(H,T)}$$

と書ける．つまり相関は距離とともに指数関数的に減衰するのである．$\xi(H,T)$ を**相関長**と言う．特に $H=0$ のときは，(9.11) 式より $\lambda_\pm = \mathrm{e}^{\beta J}\pm\mathrm{e}^{-\beta J}$ なので，

$$\xi(0,T) = \Big[\log\Big\{\coth(\beta J)\Big\}\Big]^{-1} \qquad (9.28)$$

となる．$T>0$，つまり $\beta<\infty$ では $\xi(0,T)$ は有限である．このことは，『外場 $H=0$ の 1 次元絶縁磁性体では，スピンの向きがマクロなスケールに亘って揃うことは $T>0$ ではない』ことを意味する．$T>0$ では自発磁化 $M(0,T)=0$ であるという先の結果と呼応している．

それでは**絶対零度**に近づくとどうなるであろうか．(9.28) 式より，$T\to 0$ で

$$\xi(0,T) \simeq \frac{\mathrm{e}^{2J/k_\mathrm{B}T}}{2} \to \infty$$

というように相関長が発散することが導かれる（(9.20) 式で $H>0$ としておいて $T\to 0$ とすると $M(H,0)=1$ となる）．1 次元系でも絶対零度では面白いことがありそうだ．ただし $T\simeq 0$ では，イジング模型では考慮されていなかった**量子効果**が重要になる．

（かとり・まこと，中央大学理工学部）
（なかの・とおる，中央大学理工学部）



数学の道しるべ
～研究者の道とは何か～
第11回

多様で自由な学問—数学

儀我　美一

1. 数学を好きになるきっかけ

数学に魅力を感じるきっかけはどのようなものでしょうか．もちろん人それぞれ異なるでしょうが，少なくとも２つのタイプがあるように思います．一つは数学の理論の美しさに魅かれた経験を持ったことです．日本で数学研究に従事している方々の多くは，このようなところから数学の道に入られたと推察します．もう一つは，諸分野の問題を解くために数学的考え方をすると，あっという間に解けるという爽快さに惹かれた体験です．このどちらのケースでも，そのような機会を作ってくれた人との出会いが肝心です．

幸いにも私の場合は，中学・高校時代にこの両方を経験しました．中学生の頃，数学を担当した教師が東京図書の『集合の話』（ヴィレンキン著，柴岡泰光訳（1967））というタイトルであったと思いますが，ロシア人の書いた読み物を紹介してくださいました．これには，可算無限という概念がホテルの部屋の数の話として，実に面白くわかりやすく説明してありました．それとともに，集合の濃度という考え方を自然に学ぶことができ，数学というものは計算するだけのものではなく，美しい理論を持っている学問という印象を持ちました．もちろん同時に連立方程式を用いれば，小学校の文章題はすぐに解けるし，そのような実際の問題にもその解決に大きな力となるということもわかってきました．子供の頃から，天文・気象といった自然現象に興味を持っていましたが，ここで数学に出会い，またよき教師に恵まれ，次第に本気で数学に取り組んでいきたいという気持ちが湧いてきました．

日本の多くの数学者の書かれたエッセイなどを拝見すると，初等整数論に没頭したという方が多くおられますが，私はどちらかというと「無限」という概念に興味を持ち，その方向から数学に近づいていったと感じています．

書物との出会いの他に，数学が好きになるきっかけとして重要なのは，何と言っても人との出会いでありましょう．私はこの意味で中学，高等学校，大学時代を通して大変恵まれていましたし，それがなければ今日のように数学研究者にはなっていなかったでしょう．

私の場合，正解であるのに，それが教師の想定していた解法と異なったために不正解とされた経験はほとんどありませんでした．また，間違っている場合はどのような理由で問題があるのかを徹底的に議論していただける教師に恵まれていました．特に年少時ほどこの点は重要であり，どのように対応してもらえたかが数学を好きなるか嫌いにな

るかの分かれ道となるように思われます．今，大学で数学の講義・演習をする場合，いわゆる誤答に対しては何が問題であるかを理解してもらうことに特に力を入れています．人間は正しいと思って頑張ったことを理由も告げられずに誤りとされると，やる気をなくしてしまうことが多々ありますので，この点の配慮に努めています．

2. 数学の魅力

数学のどのようなところが面白いと感じるかは人それぞれでしょう．ここでは私の経験から，数学分野で特徴的と感じる魅力について述べます．まず「時代，地域を越えた普遍性」です．数学の理論は一度正しく証明されたことは未来永劫に残ります．これは他の分野の理論とは大きく異なる点です．他の分野の理論は，それが実験で否定されない場合には残りますが，それ以外は歴史的事実としては残るかもしれませんが，分野の理論としては残りません．例えば，昔は「□□□を食べるとよい」と言われていたものが，現在では「発がん性がある」と言われることがあります．過去に全力で力を傾けてきたことが，時代の流れとともに否定されてしまうという現実があることです．数学では，正しいか誤りかというレベルでは，このようなことは起こらないのです．実際，私が 1981 年に研究者としてのデビュー作で書いた論文の中の，流体力学の基礎的方程式について得た結果は 30 年近く経った今でも事実として残り，様々な数学的結果がそれをもとに積み重ねられています．一方，地域を越えた普遍性により，海外の初対面のこの分野の研究者とでも，あっという間に打ち解けられるのは大きな喜びです．

また，「多様性」も数学の大きな魅力です．マスコミや政府関係者の方々からよく「数学のどの理論が重要か？」という質問を受けることがあります．現在流行っているのはどの理論なのかということであれば，自分の専門分野に近い分野ならば多少は説明できますが，上述の質問は数学分野では質問自体に無理があると思います．限られた予算の中から重要な研究のみに研究費を出したい，という意図が背景にあるように見受けられますが，上述の質問に無理があることを理解するためには，次の質問を考えてみるとすぐにわかるでしょう．


米国ニューヨーク大学クーラン数理解析研究所にて (1983 年)．

2 次方程式の解を「実数の範囲で求める理論」と「複素数の範囲で求める理論」とでは，どちらが理論上，あるいは応用上重要なのでしょうか，と言われればどちらも重要で，甲乙付けがたい問題であることは明らかです．何に応用するかによって，どちらを用いるかが異なるわけですが，「天動説」と「地動説」では，どちらが重要であるかという問題とは次元が異なります．このように同じような問題に対して，様々な理論が併存できることが数学の魅力の一つだと思います．また数学は他者の全く別の考えのもとで築かれた理論に，自己の理論を積み重ねることが自由にできる学問分野の一つです．要するに，カントルの言葉にあるようにどこまでも「数学は自由」なのです．

1980 年頃の日本の数学レベルは大変高かった，という調査結果を聴いたことがあります．しかし以前に私は，数学の多様性という側面，特に関連諸分野との連携という面でより環境が充実していると感じたアメリカに，2 年半ほど滞在したことがあります．そこでは，実際に非常に多様な数学に出会えました．それ以前は数学研究というと一人で何カ月も長考するというイメージを持っていましたが，それと同様に他者との討論の重要性を強く認識しました．現在，必ずしも十分とは言え

ませんが，この討論を大切にすることで様々な共同研究者に恵まれてきたと存じます．またプラズマ物理学者，流体力学者，画像処理研究者，結晶成長学者等，他分野の研究者との有益な共同研究も行うことができました．個人的には数学の研究者になってよかったと思っておりますが，欧米に比べて数学研究者と関連諸分野の大学・産業等の研究者が出会い，有意義な成果を生み出せる機会が，日本では未だに大変少ないことは残念です．アメリカでは30年ほど前にこの点を反省し，その後，様々な数学と諸分野の連携型研究所を設置しています[1)]．

3. 数学研究で重要なこと —他の学問分野との関わりに強い関心を持つ解析学者の立場から

数学を研究していく上で何が重要でしょうか．世間に注目されやすいこととしては，いわゆる難問の解決でしょう．数学研究とは一部の天才だけが難問を解いていくものなのではないか，というイメージが一般的には強く，また興味本位でそれが煽られている場面に遭遇することもあります．又聞きではありますが，ある高名な数学者に数学研究で重要なことは何かと尋ねたところ，第1にDefinition，第2にConjecture，そして第3にProofというのが返答だったそうです．これはよくわかります．まず定義（Definition），もっと広く言えば問題の定式化，何が問題かを明確にし，どのような枠組みで取り組むかをはっきりさせる必要があります．その上で何が言えるのかを予想（Conjecture）することです．そしてその後，証明（Proof）を行うという流れはよくあることです．私自身の経験とも全く一致しています．

北海道大学に1986年に赴任してから取り組んできた，界面の運動方程式についての問題は，解をどう定義するかが重要であり，定義ができれば予想を立てて頑張って証明するという感じで，まさにこの名言のとおりでした．諸分野からの問題となると，数学的意味での定義以外にそもそも何が問題であるかを明らかにするという，問題の定式化が加わります．この点はじっくり時間をかけて検討すべきと考えています．

それでは具体的にどのような研究テーマを取り上げると，数学の進展に貢献できる可能性が高いのでしょうか．この問いには簡単には答えられません．すぐに思いつくのは，今流行っているテーマです．確かにこのようにすると論文を書き易く，出版も容易です．実際に数学以外の分野では，この方式で大きな進展が望めることが多いそうです．しかし，あるシンクタンクの調査では数学は例外で，これまで全く扱われていなかったこと，また10年以上前に研究され，今は研究されていないことから面白い研究が生まれるといった傾向があるとのことでした．この点でも数学は他学問と大きく異なると言えます．まさに多様性が重要なのです．したがって，大学により得意な数学分野が異なってくるのは当然であり，例えばプリンストン大学がすべての数学研究者にとって最も魅力的な場所であるとは限りません．実際，偏微分方程式の世界的リーダーであるAvner Friedman教授（現オハイオ大数理生命科学研究所長）は1980年代に「自分はプリンストンに行ったことがない」，「全く用がない」と言われておられました．価値観は自身が磨いて創り上げ，他人の価値観にばかりぶら下がっているだけではいけないということを学んだ一言でした．なお，Friedman氏の研究姿勢は独特でした．偏微分方程式の研究を行う場合，その方程式の物理的・生物学的等の意味を十分吟味した上で研究せよという声をよく耳にします．これはある意味では正しい方法だと思いますが，Friedman氏はそのような手順には必ずしもこだわらず，面白く感じた事柄は何でも研究してしまうというスタイルでした．40歳の時点で既に200件という微分方程式分野では非常に多い件数の論文を書かれ，私とも1編だけ共著論文があります．驚いたのは，土曜日の朝に「これから論文を書く」と電話があり，その2時間後には「論文を書いたから送る」と再び電話を受けたことでした．20ページの論文を2時間でしかも，下書きなしで書いたのです．30歳前の私にとって，彼のス

タイルとバイタリティーは驚きであり，また数学研究スタイルの多様性を知るよい経験でした．

4. 予想と引用姿勢

数学研究では，問題の定式化を行った後に重要なことは，どういうことが期待されるのかという予想です．私の専門分野である微分方程式分野では，他の数学分野に比べて□□□予想というものがあまりありません．もちろん皆，ある予想を立てて様々な数学的結果を導くはずなので，その意味での予想は数多くあるのですが，分野が非常に多様であるため，□□□予想を一つ解けば，多くの問題が解決できるという構造にはなっていません．もちろん，個々の研究においては「予想」は重要です．

私の研究の中で「結果」より「予想」が注目された論文があります．それは変分問題の特異極限の問題で，Aviles-Giga 予想と呼ばれていました．現在，ほぼ解決されていますが，完全解決には至っておりません．その予想に至った舞台裏について少し述べてみましょう．1980 年代に様々なエネルギー関数の特異極限が問題になりました．例えば，相転移問題を記述する van der Waals のエネルギー

$$E_\varepsilon(u)=\frac{1}{2}\left(\int_\Omega(|u|^2-1)^2\,\mathrm{d}x+\varepsilon^2\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)$$

を $\varepsilon>0$ を 0 に近づけたときの極限を考えることが典型的な問題です．ここで $u=u(x)$ は（2 次元または 3 次元の）ユークリッド空間の領域 Ω で定義された実数値関数であるとします．ここで ∇u は u の勾配を表します．例えば物理的には，u は Ω 内を占める物質の基準密度からのずれを表します．エネルギー E_ε を最小にする u が平衡状態と考えることにしましょう．仮に $\varepsilon=0$ ならば u は Ω 上 $+1$ か -1 とすれば，もちろん最小になります．u が $+1$ の部分を A 相，u が -1 の部分を B 相とすると，それらの幾何学的配置は全く制約がなく $E_\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ が最小の 0 になります．しかし，第 2 項があると，その様子は大きく異なります．

実際，u の適当な束縛条件（例えば $\int_\Omega u\,\mathrm{d}x=$ 定数）という条件のもと，$\varepsilon\to 0$ のとき

$$E_\varepsilon(u)/\varepsilon\to\frac{4}{3}\cdot(A\text{ 相と }B\text{ 相を隔てる界面の面積})\qquad(1)$$

と極限が特徴付けられます（Ω が 2 次元の場合は「界面の面積」とは「界面の長さ」と解釈することとします）．この極限を I とおくと，I は $E_\varepsilon(u)/\varepsilon$ の Γ 極限と呼ばれるもので，汎関数の極限を論じるのによく用いられます．右辺を形式的に導出するためには $E_\varepsilon(u)$ に対して相加平均・相乗平均 $(a^2+b^2)/2\geq ab$ の評価を用いて評価してみます．すると

$$\begin{aligned}E_\varepsilon(u)/\varepsilon&\geq\int_\Omega\left||u|^2-1\right|\,|\nabla u|\,\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega|\nabla W(u)|\,\mathrm{d}x\end{aligned}\qquad(2)$$

となります．ただし，$W(u)=\int_0^u\left||w|^2-1\right|\,\mathrm{d}w$ とします．u が $+1$ と -1 しかとらないとすると，$W(u(x))$ は $2/3$ か $-2/3$ しか値をとりません．ここで右辺は上述の界面の面積（の $4/3$ 倍）を表します．したがって (2) の最右辺は I に一致します．(2) は不等式ですが，実は (1) を示すことができます（厳密な証明は，Modica-Mortela[3] による．Sternberg[5] も参照のこと）．Γ 極限であることがわかると，E_ε を最小にする u_ε の $\varepsilon\to 0$ の極限 u_0 は，I の最小値を与えます．つまり u_0 は I の最小元です．最小元以外の臨界値を与える元に対しても，似たことが言えます[6]．さて，このエネルギー E_ε は u が複素数値関数の場合は Ginzburg-Landau エネルギーと呼ばれています．u がスカラー関数 ψ の勾配 $\nabla\psi$ の場合，すなわち

$$\begin{aligned}&F_\varepsilon(\psi)\\&=\frac{1}{2}\left(\int_\Omega(|\nabla\psi|^2-1)^2\mathrm{d}x+\varepsilon^2\int_\Omega|\nabla\nabla\psi|^2\mathrm{d}x\right)\end{aligned}\qquad(3)$$

は Aviles-Giga エネルギー（汎関数）と呼ばれています．この $F_\varepsilon/\varepsilon$ の Γ 極限についての予想は Aviles-Giga の予想と呼ばれています．極限は Ω

が2次元の場合，$\nabla\psi$ のジャンプの3乗の $\nabla\psi$ のジャンプ上の積分に比例するというものです．ある会議の報告書に，Aviles-Giga 著の論文[4] として1987年に出版されています．この問題は後に高階の変分問題の特異極限の典型例となっていきますが，この分野に関する私の研究は残念ながら1998年のAviles氏との論文を最後に，この10年程遠ざかっています．若い方で興味のある方がいらっしゃったら，また是非一緒に研究してみたいものです．この予想自体は Ω が2次元の領域のときは Γ 極限として ψ の属すべき関数空間を制限すれば成立することが知られています．一方，Ω が3次元領域のときは不成立であることも知られています．Webで「Aviles-Giga」と検索すれば，この分野について様々な情報が得られます．

この研究のきっかけは1985年にミネソタ大学のInstitute for Mathematics and its Applications（IMA）の滞在にさかのぼります．その当時のIMAは創設後まもなく，諸分野に現れる数学的問題を徹底的に解明しようという気運に溢れるもので，この年は連続体力学，特に相転移問題を中心に様々な研究者を集めていました．Aviles氏は元々幾何解析の偏微分方程式，私は当時流体力学の方程式および半線形熱方程式の解の爆発問題に取り組んでいました．あるとき，液晶理論の世界的権威であるEricksen教授から，ある液晶の状態を記述するために，F_ε のようなエネルギーを考えてはどうかと提案されたのがきっかけでした．Aviles氏も私も若いポスドク研究者でした．Aviles氏とはこの問題について色々と議論し，前段階の問題を多数考察しないと問題の定式化さえ難しいという結論になりました．

数学の論文は，結果を厳密に証明できたものが出版されるのだ，という印象が一般的には強いと思います．当時，結果の要約とともに予想を書こうということになりました．実のところ私は当初，若干消極的でしたが，Aviles氏は南米出身の積極性を発揮し，勇気を持って書こうということになりました．幸いAviles氏が参加したオーストラリアでの研究会の報告集を書く機会があったので，そこに提出し，予想も公表させて頂けました．その後の展開を想い出すと，あの時点で予想を公表できたことは真に有意義であったと思っております．

しばらくの間は，この報告書の論文は埋もれていましたが，私共が引用するだけではなく，著名な研究者があるサーベイ論文を書くに当たって，引用してくれました．このあたりの欧米の引用姿勢は大変参考になります．関連論文は知る限りのものを，どのようなマイナーな報告集や雑誌にあっても，きちんと引用していくという姿勢です．我が国の場合，数学の研究者は大変忠実に行っていると存じます．しかし，数学以外の分野では必ずしもそうなっていない印象を受けます．科学において誰のアイディアで，どこまで研究が進んだかを明確にすることは非常に重要です．何でも自分の業績のように見せるのもよくないし，過度に遠慮するのも感心しません．このようなこともあって，数学分野では日本で出版されている国際学術雑誌でも世界的に重要な役割を担っているものが多くなってきていると思います[2]（しかし組織的情報発信力が弱く，今後，重要な論文が埋もれてしまう可能性もあり，改善が望まれます）．他人の研究，自身の研究を正確に引用することは重要です．そのような習慣のない国の研究は信頼され難いと実感しています．

5. 偏微分方程式の研究の面白さと多様性

私がこれまで研究してきた偏微分方程式の分野は，数学のダイナミズムと多様性を味わうには最適な分野の一つであると確信しております．それは科学や技術の現象を記述するモデル方程式の導出から始まります．私の場合は結晶成長学などからです．しかし，この部分は現象を研究している研究者と根気強く対話をしないとなかなか難しい部分で，「モデリング」とも言われています．「モデリング」には，様々な数学理論が活用されていますが，偏微分方程式がモデリングに有効であることは，過去の歴史が示すとおりです．モデル方程式が導出されれば，その方程式の解の何を知りたいのか，つまり問題の定式化・フォーミュレーショ

ンを行います．この段階では関数解析，実解析等の数学の枠組みでその問題を数学的に記述することを目指すことが多いと思います．その後，その問題を解決するために努力をし，困難な点を明確化します．たとえ目指す結果を完全に証明できなくても，他の問題との関係，またもとの現象との対応など，調べるべきことは多数あります．問題の定式化の後の解の存在，一意性などを含めた解についての様々な性質の研究は「数学解析」と呼ばれています．今日多くの解析学の理論が偏微分方程式の数学解析から生まれた，あるいはそれに応用することで発展したと言っても過言ではないでしょう．実際，20 世紀の前半までは偏微分方程式が非線形の場合，その数学解析はかなり難しかったのですが，現在では対象が非線形偏微分方程式であっても，現象を記述すると思える解を数学的に捉えることが可能になってまいりました．私の研究分野でもその通りです[7~9]．コンピュータが発達して，数学解析は一見出番がないのではと思われるかもしれませんが，数学解析は偏微分方程式をどのように数値計算をしたらよいのかについてのヒントを与えるだけではなく，その正当性を議論する上で重要です．コンピュータの性能が高まり，数値計算が簡単にできるようになった現在では，その計算の信頼性確保のためにも数学解析の必要性がますます叫ばれています．

このように偏微分方程式の研究は，もとの現象にフィードバックできる喜びとともに，いろいろな研究スタイルが可能であることが特徴です．「3 次元ナヴィエ・ストークス方程式の時間大域的な滑らかな解の構成問題」のような 100 万ドルの賞金が懸けられた難問から，未知の現象を記述する新しい微分方程式の導出まで，研究テーマは多岐にわたります．特にこれからは金融に限らず，社会科学系の問題の記述に偏微分方程式が有効になってくるでしょう．少なくとも現状では国際スタンダードと比べて，我が国は明らかに偏微分方程式とその関連分野の研究者が不足している状況ですので，若い方の参入を大いに期待しています．

今後，上述の偏微分方程式の研究をはじめ，世界的視点では数学はますます豊かになっていくと思います．国際的視点に立てば，研究者を目指す場合，ある一つの座標軸で人間を順位付けて悩む必要は本来はないものであると感じております．自分と相性のよい数学のスタイルを見つけることが肝要であり，そのためには書物だけではなく，様々なタイプの研究者と触れ合うことが有効です．数学は社会の国際化の鍵の一つであると考えております．この世の中から数学が必要ではなくなることは考えられません．海外には数学研究のポストが相当数あるので，地球単位で考えるとチャンスは拡がるでしょう．

参考文献

1) 文部科学省科学技術政策研究所，米国の数学振興政策の考え方と数学研究拠点の状況，調査資料 131, 2006.
2) 文部科学省報告書，イノベーションの創出のための数学研究の振興に関する調査，北海道大学，2008.
3) L. Modica and S. Mortola, Un esempio di Γ^{-}-convergenza, *Boll. Un. Mat. Ital., B* (5) **14** (1977), 285–299.
4) P. Aviles and Y. Giga, A mathematical problem related to the physical theory of liquid crystal configurations, Proc. Miniconference on Geometry / Partial Differential Equations, 2, June, 1986, Canberra, Proc. Centre for Mathematical Analysis, Australia National University, 12 (1987), 1–16. (eds. J.E. Hutchinson and L. Simon).
5) P. Sternberg, The effect of a singular perturbation on nonconvex variational problems, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **101** (1988), 209–260.
6) J.E. Hutchinson and Y. Tonegawa, Convergence of phase interfaces in the van der Waals-Cahn-Hilliard theory, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **10** (2000), 49–84.
7) 儀我美一・陳蘊剛，『動く曲面を追いかけて』，日本評論社 (1996).
8) 儀我美一・儀我美保，『非線形偏微分方程式—解の漸近挙動と自己相似解』，共立出版 (1999).
増補改訂英語版が以下の形で出版予定．
M.-H. Giga, Y. Giga and J. Saal, "Nonlinear Partial Differential Equations—Asymptotic Behavior of Solutions and Self-Similar Solutions", Birkhäuser.
9) Y. Giga, "Surface Evolution Equations—A Level Set Approach", Birkhäuser (2006).

（ぎが・よしかず，東京大学大学院数理科学研究科）

特　集（2009年11月号予告）		
可積分系の世界	はじめに	時弘　哲治
数理物理を語るための知のツール	可積分系とは何か	薩摩　順吉
	可積分系と方程式	R. Willox
	可積分系と幾何学	井上　玲
	可積分系と統計力学	鈴木　淳史
	量子群と可積分系	尾角　正人
	可積分系と共形場理論	山田　泰彦
	可積分系と弦理論	酒井　一博
	可積分系と重力	野澤　真人 前田　恵一
	［コラム］	中村　佳正
	［コラム］	西成　活裕
	《名著に親しむ》	時弘　哲治
本体 952 円	［インタビュー］	時弘　哲治

特　集（2009年9月号）		
シュレーディンガー	巻頭言　小伝に波紋を追う	小林　澈郎
拡げた波紋の衝撃と足跡を追う	波動方程式の創造	江沢　洋
	コペンハーゲンへの衝撃波	亀淵　迪
	解析学とシュレーディンガー	磯崎　洋
	シュレーディンガーの猫 現代における量子情報科学への展開	古澤　明
	統計熱力学の定式化　エントロピーを巡って	早川　尚男
	測色の研究　3原色説と反対色説に共通する場を求めて	鶴田　匡夫
	『生命とは何か』1944 (1948) vs 2003 (2009)	金子　邦彦
	どこからどこへ　私は一過性の存在ではない	早川　博信
	［コラム］思索へと誘うシュレーディンガーの著作たち	細谷　暁夫
	［コラム］シュレーディンガー方程式をどのように出してくるか 学部生向け教科書に見る日米物理教育の相違点	土佐　幸子
	《連載》問題例で深める物理　その8	香取　眞理 中野　徹
	《物理の道しるべ》第11回	清水　明
本体 952 円	《数学の道しるべ》第10回	藤原　耕二

編集後記

今回の特集は如何でしたでしょうか．

特集のサブタイトルにある「量子トポロジー」と呼ばれる研究領域には共形場理論，ヤン・バクスター方程式，量子群など数理物理におけるキーワードが出てくるようです．

次号の特集では可積分系という立場から，数理物理のキーワードを探っていきます．お楽しみに．　(R)

数　理　科　学　10月号

2009年10月1日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁